Potts model analogy

- Ising ($\forall$ dimensions) (= 2-state Potts) — 2 urn
  - $T<T_c$: $m>0$ ↑↑↑ or ↓↓↓ ⟷ asymetric state (broken symetry) : ▨▭ or ▭▨
  - $T>T_c$: $m=0$ ↑↓↑↓↑↓ ⟷ symetric state : ▨▨
- for the 3 urn case: analogy with the 3-state Potts model:

  $T<T_c$: 1 of the 3 states is selected ⟷ one of the urns is preferentially filled

- further analogy:

  2 urns : critical dynamical exponent: $\tau \sim N^{1/2}$: $\beta = 1/2$ (mean field)

  ↓

  Ising model ($q=2$: Potts), $\beta = 1/2$ (mean field)

  3 urns: phase diagram: no continuous transitions

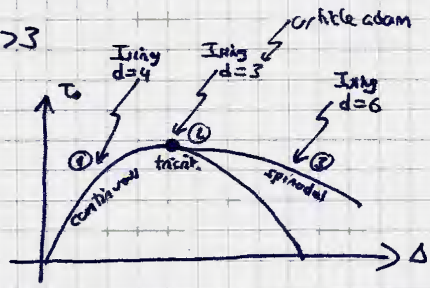
  ↓

  Mean field 3-state Potts Model: no continuous transitions

$\Longrightarrow$ analogy for $q>3$

Critical exponents

2-urns case:



- critical exponent: $\tau \sim N^z$: ① $z = 1/2$ ② $z = 2/3$ ③ $z = 1/3$
- field theory: L = syst. size: $\tau \sim L^z$: ① $z = 2$ ② $z = 2$ ③ $z = 2$

  at the critical dimension d_c (Ising like, Ginzburg-Landau)

  and: $N = L^{d_c}$ $\Longrightarrow$ $\tau \sim L^2 = (N^{1/d_c})^2 = N^{2/d_c}$

  compare with our results:

  $\Longrightarrow$ ① $d_c = 4$ ② $d_c = 3$ ③ $d_c = 6$

  recover the critical dimensions of the field theory!

  $\Longrightarrow$ but: what is the system length in our model... ?

Calculés avec ZRP: propriété générique ZRP

à mettre dans la thèse

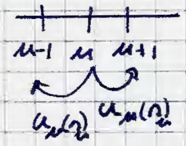
4.11.2004

ZERO RANGE PROCESS

1. ZRP sur un anneau avec CBP, transitions p.p. voisin, prob. transition uniforme.
2. " " non uniforme.
3. ZRP sur un réseau arbitraire (plus p.p. voisins)
   a. état stationnaire
   b. bilan détaillé d'un ZRP
   c. pas de bilan détaillé d'un ZRP $\Longrightarrow$ on peut y associer un nouveau ZRP avec bilan détaillé
      lemme: $\exists$ état stat P_{st} $\Longrightarrow$ $\exists$ même état stationnaire $P_{st}' = P_{st}$
4. Existence d'une condensation : sous l'évolution $\exists$ un site qui regroupe une partie macroscopique du système

---

1) Modèle: M sites, 1d, CBP, en chaque site ν $\exists$ n_ν particules. Contrainte : loi de conservation $\sum_{\mu=1}^{M} n_\mu = L$



$u \neq u_\mu$ (homogène) ; <u>ZRP</u>: u ne dépend que de n_μ ; cas particulier : transition $\longleftarrow$

$$p(n_1 \ldots n_j, \ldots n_M, t) \Longrightarrow \partial_t P(\ldots) = -\sum_{\mu=1}^{M} P(n_1 \ldots n_M, t)\, u(n_\mu)\, \Theta(n_\mu) + \sum_{\mu=1}^{M} P(n_1 \ldots n_{\mu-1} - 1, n_\mu + 1, \ldots)\, u(n_\mu + 1)\, \Theta(n_\mu)$$

– Etat stationnaire:

$$\sum_\mu P(n_1 \ldots n_M, t)\, u(n_\mu)\, \Theta(n_\mu) = \sum_\mu P(n_1 \ldots n_\mu - 1, n_{\mu+1} + 1, \ldots, t)\, u(n_{\mu+1} + 1)\, \Theta(n_\mu)$$

– Solution:

$$P_s(\{n_j\}) = Z^{-1}(M, L) \prod_{\mu=1}^{M} f(n_\mu) \quad ; \quad f(n) = \begin{cases} \prod_{m=1}^{n} \dfrac{1}{u(m)} & , n \geq 1 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

– Preuve: en remplaçant dans l'éq. de l'état stationnaire, on vérifie que c'est correct:

$$u(n_\mu) \frac{f(n_\mu)}{f(n_{\mu-1})} = u(n_{\mu+1} + 1) \frac{f(n_{\mu+1} + 1)}{f(n_{\mu+1})} = \text{cte}$$

$$\Longrightarrow f(n_\mu) = C\, f(n_{\mu-1}) / u(n_\mu) \Longrightarrow C = 1$$, et on continue les itérations //

2) $u = u_\mu(n_\mu)$: inhomogène. La solution est obtenue de la même façon:

$$\boxed{P_s(\{n_j\}) = Z^{-1}(M, L) \prod_{\mu=1}^{M} f_\mu(n_\mu)} \quad ; \quad f_\mu(n) = \begin{cases} \prod_{m=1}^{n} \dfrac{1}{u_\mu(m)} & , n \geq 1 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}$$

C'est le même problème complètement asymétrique.

3) $u_\mu(n_\mu)$: probabilité de quitter le site μ
$W(\mu \to \nu)$: proba. de trans. site $\mu \to \nu$ t.q. $\sum_\nu W(\mu \to \nu) = 1$.

$u_\mu(n_\mu)\, W(\mu \to \nu)\, dt$: proba. de transiter de $\mu \to \nu$ durant dt

– Problème à 1 particule: soit $s(\mu, t)$ la probabilité que la particule soit en μ au temps t.

$$\partial_t s(\mu, t) = \sum_\nu s(\nu, t)\, W(\nu \to \mu) - \sum_\nu s(\mu, t)\, W(\mu \to \nu)$$

Solution stationnaire : $s(\mu, t) \xrightarrow{t \to \infty} s_\mu = \sum_\nu s_\nu\, W(\nu \to \mu)$
Ceci permet de définir s_μ.

a) Problème à L particules: <u>solution stationnaire</u>:

$$\boxed{f_\mu(n) = \begin{cases} \prod_{m=1}^{n} \dfrac{s_\mu}{u_\mu(m)} & , n \geq 1 \\ 1 & , n = 0 \end{cases}}$$

b) Bilan détaillé: si ZRP obéit le bilan détaillé, alors:

$$u_\mu(n_\mu)\, W(\mu \to \nu)\, P_s(n_1, \ldots n_\nu, \ldots n_M; t) = u_\nu(n_\nu + 1)\, W(\nu \to \mu)\, P_s(n_1 \ldots n_\nu + 1, \ldots, n_\mu - 1; t)$$

ce qui est équivalent en remplaçant la forme de P_s :

$$s_\mu\, W(\mu \to \nu) = s_\nu\, W(\nu \to \mu)$$

ce qui est le bilan détaillé pour le problème à 1 particule.

c) si ZRP n'est pas de type bilan détaillé, alors on introduit des taux $W'(\mu \to \nu)$ t.q. le bilan détaillé est satisfait pour le problème homogène $s_\mu' = \text{cte}$. On redéfinit alors un nouveau modèle ZRP où :

$$u_\mu'(m) = u_\mu(m)\, s_\mu' / s_\mu$$

$$\Longrightarrow P_s' = P_s$$

4) condition : $u(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ assez vite, et $W_{nn'}$ tous connectés.

Modèle de 3 urnes : établissement des probabilités de transition bis

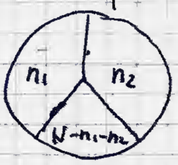
$\omega =$ proba. $E \geqslant E_0$

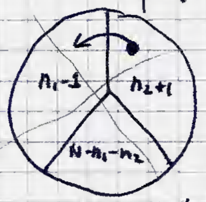
process = proba. of leaving one urn, ~~the sleat will be select. at rdm.~~

$$p(n_1,n_2,t)\cdot\left(\frac{n_1}{N}(1-\omega(n_1))\cancel{2}+\frac{n_2}{N}(1-\omega(n_2))\cancel{2}+\frac{N-n_1-n_2}{N}(1-\omega(N-n_1-n_2))\cancel{2}\right)$$

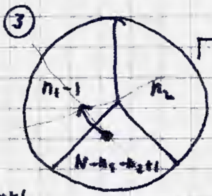
$$\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)$$

urn B urn C

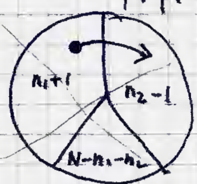
$P(n_1,n_2,t+1) =$ ① 

② + 

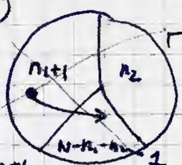
$\rightarrow p(n_1-1,n_2+1,t)\cdot\frac{n_2+1}{N}\,\omega(n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$

③ + 

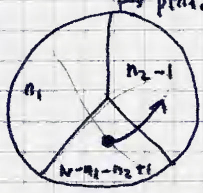
$\rightarrow p(n_1-1,n_2,t)\,\frac{N-n_1-n_2+1}{N}\,\omega(N-n_1-n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$

④ + 

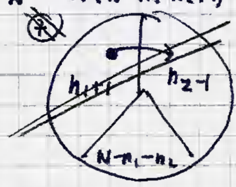
$\rightarrow p(n_1+1,n_2-1,t)\,\frac{n_1+1}{N}\,\omega(n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$

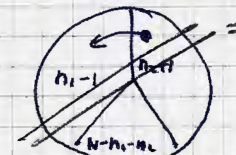
⑤ + 

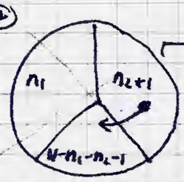
$\rightarrow p(n_1+1,n_2,t)\,\frac{n_1+1}{N}\,\omega(n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$

⑥ + 

$\rightarrow p(n_1,n_2-1,t)\,\frac{N-n_1-n_2+1}{N}\,\omega(N-n_1-n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$

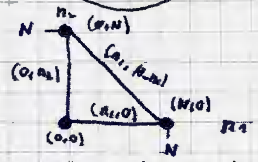
+  = ④

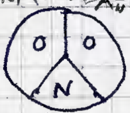
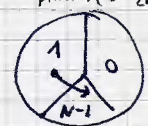
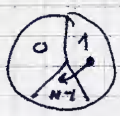
+  = ②

⑦ + 

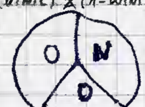
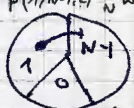
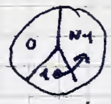
$\rightarrow p(n_1,n_2+1,t)\,\frac{n_2+1}{N}\,\omega(n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$

Condition de bord :

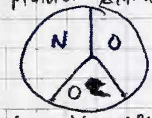
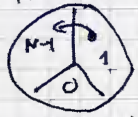
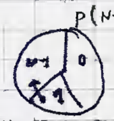


$p(0,0,t) =$  +  + 

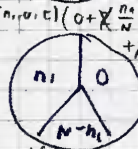
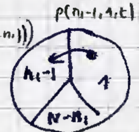
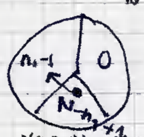
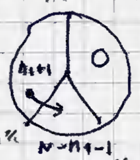
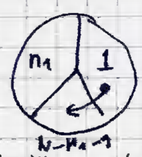
$p(0,0,t)\left(0+0+\cancel{2}\frac{N}{N}(1-\omega(N))\right)$; $p(1,0,t)\left(0+\frac{1}{2N}\omega(1)\right)\cancel{1/2}$; $p(0,1,t)\left(0+\frac{1}{2N}\omega(1)\right)$

$p(0,N,t) =$  +  + 

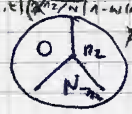
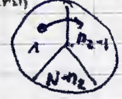
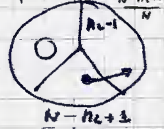
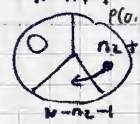
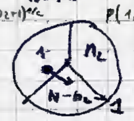
$p(0,N,t)\,\cancel{2}(1-\omega(N))$; $p(1,N-1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(0,N-1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$

$p(N,0,t) =$  +  + 

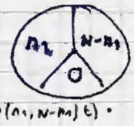
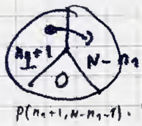
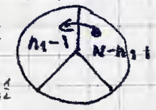
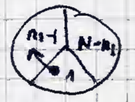
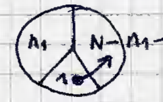
$p(N,0,t)\cdot\cancel{2}(1-\omega(N))$; $p(N-1,1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(N-1,0,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$

$p(n_1,0,t) =$  +  +  +  + 

$p(n_1,0,t)\left(0+\cancel{2}\frac{n_1}{N}(1-\omega(n_1))+\cancel{2}\frac{N-n_1}{N}(1-\omega(N-n_1))\right)$; $p(n_1-1,1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1-1,0,t)\,\frac{N-n_1+1}{N}\,\omega(N-n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1+1,0,t)\,\frac{n_1+1}{N}\,\omega(n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1,1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$

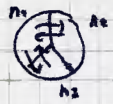
$p(0,n_2,t) =$  +  +  +  + 

$p(0,n_2,t)\left(\cancel{2}\,n_2/N\,(1-\omega(n_2))+\cancel{2}\frac{N-n_2}{N}(1-\omega(N-n_2))\right)$; $p(1,n_2-1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(0,n_2-1,t)\,\frac{N-n_2+1}{N}\,\omega(N-n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(0,n_2+1,t)\,\frac{n_2+1}{N}\,\omega(n_2+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(1,n_2,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$

$p(n_1,N-n_1,t) =$  +  +  +  + 

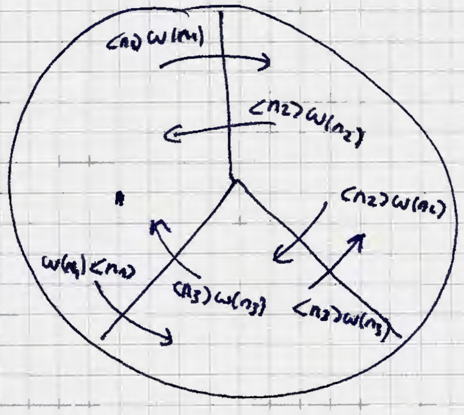
$p(n_1,N-n_1,t)\cdot\left(0+\cancel{2}\frac{n_1}{N}(1-\omega(n_1))+\cancel{2}\frac{N-n_1}{N}(1-\omega(N-n_1))\right)$; $p(n_1+1,N-n_1-1,t)\cdot\frac{n_1+1}{N}\,\omega(n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1-1,N-n_1+1)\,\frac{N-n_1+1}{N}\,\omega(N-n_1+1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1-1,N-n_1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$; $p(n_1,N-n_1-1,t)\,\frac{1}{N}\,\omega(1)\,\tfrac{1}{2}$

État steady state:

condition d'équilibre local  (et non pas d'équilibre global  ; choix).

$$\left.\begin{array}{l}\langle n_1\rangle\omega(n_1) = \langle n_2\rangle\omega(n_2)\\ \langle n_1\rangle\omega(n_1) = \langle n_3\rangle\omega(n_3)\end{array}\right\} \quad \langle n_1\rangle\omega(n_1) = \langle n_2\rangle\omega(n_2) = \langle n_3\rangle\omega(n_3)$$

et le flux entre n_2 et n_3 est automatiquement déterminé par l'équilibre local ci-dessus si on admet un flux total nul (on ne s'intéresse pas à la solution qui aurait un flux non nul rémanent, car il suffirait alors de le soustraire)



Preuve:

$$\left.\begin{array}{l}\langle n_1\rangle\omega(n_1) = \frac{1}{2}\langle n_2\rangle\omega(n_2) + \frac{1}{2}\langle n_3\rangle\omega(n_3)\\ \langle n_2\rangle\omega(n_2) = \frac{1}{2}\langle n_1\rangle\omega(n_1) + \frac{1}{2}\langle n_3\rangle\omega(n_3)\\ \langle n_3\rangle\omega(n_3) = \frac{1}{2}\langle n_1\rangle\omega(n_1) + \frac{1}{2}\langle n_2\rangle\omega(n_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{permutations !}$$

On en tire:

$$\langle n_3\rangle\omega(n_3) = \frac{1}{2}\langle n_1\rangle\omega(n_1) + 1/2\,\langle n_2\rangle\omega(n_2)$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\langle n_1\rangle\omega(n_1) = \frac{3}{2}\langle n_2\rangle\omega(n_2) + \frac{1}{2}\langle n_1\rangle\omega(n_1) + 1/2\,\cancel{\langle n_2\rangle}\omega(n_2)\\ 2\langle n_2\rangle\omega(n_2) = \frac{3}{2}\langle n_1\rangle\omega(n_1) + 1/2\,\cancel{\langle n_1\rangle}\omega(n_1) + 1/2\,\langle n_2\rangle\omega(n_2)\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l}\langle n_1\rangle\omega(n_1) = \langle n_2\rangle\omega(n_2)\\ \langle n_2\rangle\omega(n_2) = \langle n_1\rangle\omega(n_1)\end{array}$$

et idem avec $\langle n_3\rangle\omega(n_3)$

$$\Longrightarrow \boxed{\langle n_i\rangle\omega(n_i) = \langle n_j\rangle\omega(n_j)} \qquad \forall i,j = 1,2,3 \qquad \#$$

~~Introduisons le paramètre de brisement de symétrie ε :~~

Steady state equations :

$$\langle n_i\rangle \omega(n_i) = \langle n_j\rangle \omega(n_j) \quad , \forall i,j = 1,\dots,3 \qquad n_i := \langle n_i\rangle$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{n_1-n_2}{2N} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{n_1-n_3}{2N} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} n_1\,\omega(n_1) = n_2\,\omega(n_2) \\ n_1\,\omega(n_1) = n_3\,\omega(n_3) \end{array}$$

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \frac{1}{2N}\left(n_1-n_2+n_1-n_3\right) = \frac{1}{2N}\left(2n_1-n_2-n_3\right) \in [1, -1/2]$$

avec : $N = n_1+n_2+n_3$, donc on veut écrire $n_1 = n_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2,N)$, $n_2 = n_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2,N)$, $n_3 = n_3(\varepsilon_1,\varepsilon_2,N)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} N = n_1+n_2+n_3 \\ 2N\varepsilon_1 = n_1-n_2 \\ 2N\varepsilon_2 = n_1-n_3 \end{cases} \Longrightarrow n_1 = 2N\varepsilon_1 + n_2 \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow N = 2N\varepsilon_1+n_2+n_2+n_3 \Longrightarrow N(1-2\varepsilon_1) = 2n_2+n_3 \quad ⊛ \\ \Longrightarrow 2N\varepsilon_2 = 2N\varepsilon_1+n_2-n_3 \Longrightarrow 2N(\varepsilon_2-\varepsilon_1) = n_2-n_3 \quad ⊛⊛ \end{array}$$

$$⊛ \Longrightarrow n_3 = N(1-2\varepsilon_1) - 2n_2$$

$$⊛⊛ \Longrightarrow 2N(\varepsilon_2-\varepsilon_1) + N(1-2\varepsilon_1) - 2n_2 = n_2$$

$$\Longrightarrow 2N\varepsilon_2 - 2N\varepsilon_1 + N - 2N\varepsilon_1 = 3n_2$$

$$\Longrightarrow n_2 = \frac{1}{3}\left(2N\varepsilon_2 + N - 4N\varepsilon_1\right) = \frac{N}{3}\left(2\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 + 1\right)$$

et de ⊛ :

$$N(1-2\varepsilon_1) - 2n_2 = n_3 \Longrightarrow n_3 = N - 2N\varepsilon_1 - \frac{2}{3}N\left(2\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 + 1\right)$$

$$= N - 2N\varepsilon_1 - \frac{2}{3}N\,2\varepsilon_2 + \frac{2}{3}N\,4\varepsilon_1 - \frac{2}{3}N$$

$$= N\left(1-\tfrac{2}{3}\right) + N\varepsilon_1\left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3}\right) - \frac{4}{3}N\varepsilon_2$$

$$= \frac{1}{3}N + N\varepsilon_1\frac{2}{3} - \frac{4}{3}N\varepsilon_2$$

$$= \frac{N}{3}\left(1 + 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2\right)$$

Ainsi :

$$n_1 = N - n_2 - n_3 = \frac{N}{3}\left(3 - (2\varepsilon_2 - 4\varepsilon_1 + 1) - (1 + 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)\right)$$

$$= \frac{N}{3}\left(\cancel{3}^{\,1} - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 - \cancel{1} - \cancel{1} - 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2\right)$$

$$= \frac{N}{3}\left(1 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\right)$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_1 = N/3\,(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2) \\ n_2 = N/3\,(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2) \\ n_3 = N/3\,(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2) \end{array}} \qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & +2N & +2N \\ 1 & -4N & +2N \\ 1 & +2N & -4N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} N \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/2N & -1/2N & 0 \\ 1/2N & 0 & -1/2N \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2N/3 & 2N/3 \\ 1/3 & -4N/2 & 2N/3 \\ 1/3 & 2N/3 & -4N/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2N & 2N \\ 1 & -4N & 2N \\ 1 & 2N & -4N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2N & 2N \\ 1 & -4N & 2N \\ 1 & 2N & -4N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{Ok}}$$

Valeur que l'on remplace dans les deux équations d'origine :

$$n_1\,\omega(n_1) = n_2\,\omega(n_2) \Longrightarrow \frac{N}{3}\left(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2\right)\omega\left(N/3\,(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) - \frac{N}{3}\left(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2\right)\omega\left(N/3\,(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(\tfrac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) - (1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(N/3\,(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = 0$$

$$n_1\,\omega(n_1) = n_3\,\omega(n_3) \Longrightarrow (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(\tfrac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) - (1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\,\omega\left(N/3\,(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right) = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} F(N,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0 \\ G(N,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0 \end{array}}$$

$$\begin{cases} F(N,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) - (1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) \\ G(N,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\,\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) - (1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\,\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right) \\ \omega(x) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x/N)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{T(x)}\right) \end{cases}$$

Analyse de stabilité : développ. Taylor en puiss. petits paramètres $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et égalité à chaque ordre. Ainsi :

$$\omega\left(N/3\,(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(N/3\, f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-1/3\, f(\varepsilon_1,\varepsilon_2))}\right)$$

que l'on développe en puissances de ε_1 et ε_2 :

$$= \Omega(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

$$\exp\left(-\left(\tau_0+\Delta(1-1/3 f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\right)^{-1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-1/3 f(0,0))}\right)$$

$$+ \exp(\ldots)\cdot(-1)\,\frac{-1}{(\tau_0+\Delta(\cdots))^2}\,\nabla\left(\tau_0+\Delta(1-1/3 f(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\right)\Big|\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}$$

$$= \Omega_f(0,0) + \frac{\Omega(0,0)}{(\tau_0+\Delta\cdot(1-1/3 f(0,0)))^2}\cdot\Delta\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_1}\\ \frac{\partial f}{\partial\varepsilon_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}^{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}$$

$$= \Omega_f(0,0)\left(1-\frac{1}{3}\underbrace{\frac{\Delta}{(\tau_0+\Delta(1-1/3 f(0,0)))^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_i}\Big|_{\varepsilon_i=0}\cdot\varepsilon_i}_{:=(\ldots)}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$= \Omega_f(0,0) + \underbrace{H_f\cdot\vec{\varepsilon}}_{\Omega_f(0,0)} + O(\varepsilon^2)$$

$\boxed{O(\varepsilon^0)}$

F : $(1+2\cancel{\varepsilon_1}+2\cancel{\varepsilon_2})\,\Omega(0,0) - (1-\cancel{4\varepsilon_1}+2\cancel{\varepsilon_2})\,\Omega(0,0) = 0 \implies 0=0 \;\; H_f\cdot\varepsilon \ldots$

G : idem.

$\boxed{O(\varepsilon^1)}$

F : $(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\left(\Omega_{f_1}(0,0) - \Omega_{f_1}(0,0)\cdot\frac{1}{3}(\ldots)\right) - (1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\left(\Omega_{f_2}(0,0) - \Omega(0,0)_{f_2}\frac{1}{3}(\ldots)\right) = 0$

$\implies -\Omega_{f_1}(0,0)\frac{1}{3}(\cdots) + \Omega_{f_1}(0,0)(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2) + \Omega(0,0)_{f_2}\frac{1}{3}(\ldots) - \Omega_{f_2}(0,0)(-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2) = 0$

avec : $f_1 = 1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$, $f_2 = 1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2$

$\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_1} = 2$; $\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_2} = 2$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_1} = -4$, $\frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_2} = 2$

$\Omega_{f_1}(0,0) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-1/3)}\right) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+2/3\Delta}\right) = \Omega_{f_2}(0,0) := \Omega(0,0)$

↳ peut simplifier ce terme !

$\implies -\frac{1}{3}(\ldots)_{f_1} + \overset{6}{2}\varepsilon_1 + \cancel{2\varepsilon_2} + \frac{1}{3}(\ldots)_{f_2} + 4\varepsilon_1 - \cancel{2\varepsilon_2} = 0$

$\implies 6\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\left((\ldots)_{f_2} - (\ldots)_{f_1}\right) = 0$

$\implies 6\varepsilon_1 + 1/3\left(\frac{\Delta}{(\tau_0+\Delta(1-1/3))^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_i}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon_i - \frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_i}\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon_i\right) = 0$

$\implies 6\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\left(\underbrace{2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-(-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}_{=2\varepsilon_1+\cancel{2\varepsilon_2}+4\varepsilon_1-\cancel{2\varepsilon_2}\,=\,6\varepsilon_1}\right) = 0$

$\implies 1 + 1/3\,\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2} = 0$

G: $(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\left(\cancel{\Omega(0,1,0)}+\cancel{\Omega(0,1,0)}\,\underline{H_{f_1}}\cdot\underline{\varepsilon}\right) - (1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\left(\cancel{\Omega(0,1,0)}+\cancel{\Omega(0,1,0)}\,\underline{H_{f_3}}\cdot\underline{\varepsilon}\right) = 0$ ④

$$\Rightarrow (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(1+\underline{H_{f_1}}\cdot\underline{\varepsilon}) - (1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)(1+\underline{H_{f_3}}\cdot\underline{\varepsilon}) = 0$$

La structure générale des équations est donc :

$$\boxed{f_1(1+\underline{H_{f_1}}\cdot\underline{\varepsilon}) - f_i(1+\underline{H_{f_i}}\cdot\underline{\varepsilon}) = 0 \qquad , i = 2,3}$$

$$, \underline{H_{f_i}}\cdot\underline{\varepsilon} = -\frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial f_i}{\partial\varepsilon_j}\varepsilon_j$$

Pour G, on aura avec: $f_1 = 1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$
$f_3 = 1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2$

$$\Rightarrow (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(1+\underline{H_{f_1}}\cdot\underline{\varepsilon}) - (1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)(1+\underline{H_{f_3}}\cdot\underline{\varepsilon}) = 0$$

$$H_{f_1}\cdot\varepsilon + \cancel{2\varepsilon_1} + \cancel{2}\varepsilon_2 - H_{f_3}\varepsilon - \cancel{2\varepsilon_1} + \overset{6}{\cancel{4}}\varepsilon_2 = 0$$

$$\Rightarrow 6\varepsilon_2 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\left(\cancel{\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_1}}_{=2}\varepsilon_1} + \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_2}}_{=2}\varepsilon_2 - \cancel{\underbrace{\frac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_1}}_{=2}\varepsilon_1} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_2}}_{=-4}\varepsilon_2}_{=4\varepsilon_2}\right)$$

$$\Rightarrow 6\varepsilon_2\left(1-\frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2} = 3}$$

Vérification de l'équation pour F:

$$f_1(1+H_{f_1}\varepsilon) - f_2(1+H_{f_2}\varepsilon) = 0 \qquad , f_1 = 1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$$
$$f_2 = 1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2$$

$$\Rightarrow (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(1+H_{f_1}\varepsilon) - (1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(1+H_{f_2}\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow H_{f_1}\varepsilon + 2\varepsilon_1 + \cancel{2\varepsilon_2} - H_{f_2}\varepsilon + 4\varepsilon_1 \cancel{-2\varepsilon_2} = 0$$

$$\Rightarrow 6\varepsilon_1 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\left(\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_1}}_{=2}\varepsilon_1 + \cancel{\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_2}}_{=2}\varepsilon_2} \underbrace{- \underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_1}}_{=-4}\varepsilon_1}_{=4\varepsilon_1} - \cancel{\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_2}}_{=2}\varepsilon_2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 6\varepsilon_1\left(1-\frac{1}{3}\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta}{(\tau_0+2/3\Delta)^2} = 3}$$

$\hat{M}$ équation pour ε_1 et ε_2 ! Qu'est-ce que l'on veut ? $\tau_0 = \tau_0(\Delta)$, i.e. maintenant $\tau_0 = \tau_c$:

$$\Delta = 3(\tau_c+2/3\Delta)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\Delta}{3}} = \tau_c + 2/3\Delta$$

$$\Rightarrow \tau_c = \sqrt{\frac{\Delta}{3}} - \frac{2}{3}\Delta$$

$$\boxed{\tau_c(\Delta) = \sqrt{\Delta/3} - 2/3\Delta}$$

VERIFICATION

5

phyproprio.

$\omega(x) = \omega(^{4}/_{3}f) = \exp\left(-1/(T_0+\Delta(1-1/3f))\right) = \Omega_f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $f = 1+\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2$

$$\Omega(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \Omega_f(0,0) + \nabla_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Omega_f(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} + \dots$$

$$= \Omega(0,0) + \sum_{i=1}^{2} e_i \frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta(1-1/3f)}\right)\Big|_{\varepsilon_i=0}\varepsilon_i e_i + \dots$$

$$= \Omega(0,0) + \sum_{i=1}^{2} e_i \exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta(1-1/3f)}\right)(-1)\frac{-1}{(T_0+\Delta(1-1/3f))^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\left(T_0+\Delta(1-1/3f)\right)\Big|_{\varepsilon_i=0}\varepsilon_i e_i + \dots$$

$$= \Omega(0,0) + \sum_{i=1}^{2} e_i\,\Omega(0,0)\frac{1}{[T_0+\Delta(1-1/3f)]^2}\Delta\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}f\Big|_{\varepsilon_i=0} e_i\varepsilon_i + \dots$$

$$= \Omega(0,0)\left(1 + \frac{1}{[T_0+\Delta(1-1/3\ )]^2}\sum_{i=1}^{2}e_i\Delta(-1)\frac{1}{3}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}(1+\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)\Big|_{\varepsilon_i=0}}_{=\alpha\delta_{i,1}+\beta\delta_{i,2}} e_i\varepsilon_i\right) + \dots$$

$$= \Omega(0,0)\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{[T_0+\Delta(1-1/3\ )]^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{2} e_i(\alpha\delta_{i,1}+\beta\delta_{i,2})\varepsilon_i e_i}_{=\alpha e_1^2\varepsilon_1+\beta e_2^2\varepsilon_2 \,=\, \alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2}\right) + \dots$$

$$= \Omega(0,0)\left(1 - \frac{\Delta}{3}\frac{\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2}{[T_0+\Delta(1-1/3\ )]^2}\right) + \dots$$

Equations à résoudre :

$$\begin{cases} a)\ f_1\Omega_{f_1}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) - f_2\Omega_{f_2}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0 \\ b)\ f_1\Omega_{f_1}(\varepsilon_1\varepsilon_2) - f_3\Omega_{f_3}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)\cdot\left(1-\frac{\Delta}{3}\frac{\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2}{[\dots]^2}\right) - (1+\alpha_2\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2)\left(1-\frac{\Delta}{3}\frac{\alpha_2\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2}{[\dots]^2}\right) = 0$$

Ou bien à l'ordre $O(\varepsilon^2)$:

$$-\frac{\Delta}{3}\frac{\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2}{[\dots]^2} + \alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2 + \frac{\Delta}{3}\frac{\alpha_2\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2}{[\dots]^2} - \alpha_2\varepsilon_1 - \beta_2\varepsilon_2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(\alpha-\alpha_2)+\varepsilon_2(\beta-\beta_2) - \frac{\Delta}{3}\left(\frac{\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2}{[\dots]^2} - \frac{\alpha_2\varepsilon_1+\beta_2\varepsilon_2}{[\dots]^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(\alpha-\alpha_2)+\varepsilon_2(\beta-\beta_2) - \frac{\Delta}{3}\frac{1}{[\dots]^2}\left(\varepsilon_1(\alpha-\alpha_2)+\varepsilon_2(\beta-\beta_2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon_1(\alpha-\alpha_2)+\varepsilon_2(\beta-\beta_2)\right)\left(1-\frac{\Delta}{3}\frac{1}{[T_0+\Delta(1-1/3)]^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\varepsilon_1(\alpha-\alpha_2)+\varepsilon_2(\beta-\beta_2)\right)\left(1-\frac{\Delta}{3}\frac{1}{[T_0+2/3\Delta]^2}\right) = 0$$

Soit $\alpha=\alpha_2, \beta=\beta_2$: trivial. (ou bien dans l'autre cas, $\alpha=\alpha_3, \beta=\beta_3$)

Soit

$$\frac{\Delta}{3}\frac{1}{[T_0+2/3\Delta]^2} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta/3} = T_0 + 2/3\Delta$$

$$\Rightarrow \boxed{T_c(\Delta) = \sqrt{\Delta/3} - 2/3\Delta}$$

correct...

 $=$  t.q. $n + 2n_2 = N$; $n_2 = \frac{N-n}{2}$

Condition d'équilibre:

$$\left.\begin{array}{l} \langle n \rangle w(n) = \tfrac{1}{2} \langle n_2 \rangle w(n_2) + \tfrac{1}{2} \langle n_2 \rangle w(n_2) = \langle n_2 \rangle w(n_2) \\ 2 \langle n_2 \rangle w(n_2) = \langle n \rangle w(n) + \langle n_2 \rangle w(n_2) \Rightarrow \langle n \rangle w(n) = \langle n_2 \rangle w(n_2) \end{array}\right\} \text{m. équation.}$$

La condition donne:

$$n \cdot e^{-1/\tau(n)} = n_2 \, e^{-1/\tau(n_2)} \quad , \; n_2 = \frac{N-n}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad n \cdot e^{-1/\tau(n)} = \frac{N-n}{2} e^{-1/\tau\left(\frac{N-n}{2}\right)}$$

$\tau(x) = \tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{x}{N}\right)$, soit $n = \frac{n}{N}$, alors:

$$n \, e^{-1/\tau_0 + \Delta(1-n)} = \frac{1-n}{2} e^{-1/\tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{1-n}{2}\right)}$$

à résoudre par Newton, pour n. Méthode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n) \quad ; \; f(\bar{x}) = 0$$

$$f(x) = x \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \Delta(1-x)}\right) - \frac{1-x}{2} \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{1-x}{2}\right)}\right) = 0$$

$$f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right) + x \cdot (-1) \frac{-1}{(\tau_0 + \Delta(1-x))^2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right) \cdot (-\Delta) + \ldots$$

0.6 · 0.12

$$= \frac{1}{4}\left[\exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right) \cdot \left(4 - 4\frac{x \cdot \Delta}{(\tau_0+\Delta(1-x))^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \Delta\frac{1+x}{2}}\right)\left(2 + \frac{4\Delta(x-1)}{(2\tau_0 + \Delta(1+x))^2}\right)\right]$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right)\left(1 - \frac{\Delta x}{(\tau_0+\Delta(1-x))^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta\left(\frac{1+x}{2}\right)}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta(1-x)}{(2\tau_0+\Delta(1+x))^2}\right)$$

Vérification:

$$f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right)\left(1 - \frac{\Delta x}{(\tau_0+\Delta(1-x))^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1 - 1/2 + x/2)}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2} - \frac{1}{\left(\tau_0 + \Delta\frac{1+x}{2}\right)^2} \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{1-x}{2}\right)$$

$$= \text{ok} + \text{ok} \cdot \left(1/2 - \frac{\Delta(1-x)}{4} \frac{1}{\left(\tau_0 + \Delta\frac{(1+x)}{2}\right)^2}\right) \quad : \checkmark$$

$$\boxed{f'(x) = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-x)}\right)\left(1 - \frac{\Delta x}{(\tau_0+\Delta(1-x))^2}\right) + \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta\left(\frac{1+x}{2}\right)}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta(1-x)}{4} \frac{1}{\left(\tau_0+\Delta\frac{1+x}{2}\right)^2}\right)}$$

New model : $\sim n^2$

2 vins : $\varepsilon = \frac{n_1 - n_2}{2N}$, $n_2 = N - n_1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} n_1 = N(\varepsilon + 1/2) \\ n_2 = N(-\varepsilon + 1/2) \end{matrix}}$

- équilibre : $\boxed{n_1^2\, \omega(n_1) = n_2^2\, \omega(n_2)}$
- avec :

$$n_1^2 \simeq N^2(\varepsilon + 1/4)$$
$$n_2^2 \simeq N^2(-\varepsilon + 1/4)$$

- D.L. :

$$\omega(n_i) = \exp\left(-B \cdot \frac{n_i^2}{N^2}\right) = \exp\left(-B \cdot (1/2 + \alpha_i \varepsilon)^2\right) \quad , \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$$

$$\omega(n_i) = \exp(-B/4) \cdot \left(1 - 2B(\alpha\varepsilon + 1/2)\cdot\alpha \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon\right)$$

$$= e^{-B/4}\left(1 - B\alpha\varepsilon\right)$$

- éq. :

$$(\varepsilon + 1/4)\, \cancel{e^{-B/4}} \cdot (1 - B\varepsilon) - (-\varepsilon + 1/4)\, \cancel{e^{-B/4}}(1 + B\varepsilon) = 0 \qquad \boxed{B = 0}$$

$$\Rightarrow \varepsilon + \cancel{1/4} - 1/4\, B\varepsilon + \varepsilon - \cancel{1/4} - 1/4\, B\varepsilon = 0$$
$$\Rightarrow 2\varepsilon - 1/2\, B\varepsilon = 0$$
$$\Rightarrow 2 = 1/2\, B$$
$$\Rightarrow B = 4 \qquad \boxed{B = \{0, 4\}}$$

3 vins : $n_1 = N/3(1 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$ $\qquad \omega(x) = \exp(-B(x/N)^2)$; $n_i\, \omega(n_i) = n_j\, \omega(n_j)$

$n_2 = N/3(1 - 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$

$n_3 = N/3(1 + 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)$

éqns : $(1 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2 \omega(n_1) = (1 - 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2\, \omega(n_2)$

$(1 + 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2 \omega(n_1) = (1 + 2\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2)^2\, \omega(n_2)$

Soit $f_i = \alpha_i \varepsilon_1 + \beta_i \varepsilon_2$, alors : $n_i = N/3\,(1 + f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ et le D.L. :

$$\omega(n_i) = \exp\left(-B \cdot \frac{1}{9}(1 + f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2))^2\right)$$

$$= e^{-B/9}\left(1 - B/9 \cdot 2\,(1 + \cancel{f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^{=0}) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon_j\right) + \cdots$$

$$= e^{-B/9}\left(1 - \frac{2}{9}B \cdot \underbrace{(\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2)}_{= f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}\right)$$

$$= e^{-B/9}\left(1 - \frac{2}{9}B f_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\right)$$

- Résolution :

$$(1 + f_i)^2 = 1 + f_i^2 + 2f_i \simeq 1 + 2f_i$$

$$\Longrightarrow (1 + 2f_1)\, e^{-B/9}\left(1 - \frac{2}{9}Bf_1\right) - (1 + 2f_2)\, e^{-B/9}\left(1 - \frac{2}{9}Bf_2\right) = 0 \qquad , \boxed{B = 0} \text{ sol.}$$

$$\Longrightarrow \cancel{1} - \frac{2}{9}Bf_1 + 2f_1 - \cancel{1} + \frac{2}{9}Bf_2 - 2f_2 = 0$$

$$\Longrightarrow 2(f_1 - f_2) + \frac{2}{9}B(f_2 - f_1) = 0$$

$$\Longrightarrow (f_1 - f_2) - \frac{B}{9}(f_1 - f_2) = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{(f_1 - f_2)}_{= 6\varepsilon_1} \cdot (1 - B/9) = 0$$

$$\Longrightarrow 1 = \frac{1}{9}B$$

$$\Longrightarrow B = 9 \qquad \boxed{B = \{0, 9\}}$$

Model $\sim n^2$: find the first critical point

t.q. $n + 2n_2 = N \Rightarrow n_2 = \frac{N-n}{2}$
$n_2 = n_3$

$$\begin{cases} \langle n_1\rangle^2 \omega(n_1) = \langle n_2\rangle^2 \omega(n_2) \\ \langle n_1\rangle^2 \omega(n_1) = \langle n_3\rangle^2 \omega(n_3) \\ \omega(n) = \exp(-Bn^2/N^2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ même équation : $n^2\omega(n) = n_2^2\omega(n_2)$, i.e.

$$\Rightarrow \quad n^2 e^{-Bn^2} = \left(\frac{1-n}{2}\right)^2 e^{-B\left(\frac{1-n}{2}\right)^2}$$

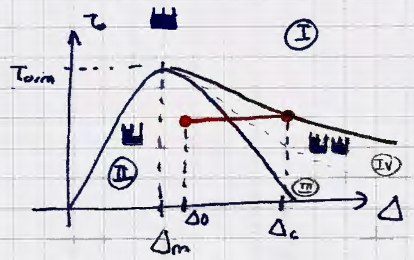
$$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 e^{-Bx^2} - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 e^{-B\left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = 0$$

Méthode de Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n)$; $f(x^*) = 0$

Dérivée:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{8}\exp\left(-\frac{B}{4}\cdot(1-2x+5x^2)\right)\left(e^{Bx^2}(x-1)\cdot(-4+B(x-1)^2) - 16\, e^{\frac{B}{4}(x-1)^2} x\,(Bx^2-1)\right)}$$

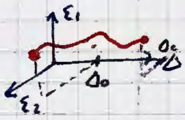
Calcul de la courbe entre I et III



1) Choix de τ_0, Δ_0 pour être dans II

2) Résoudre les 2 éqn. $F=0$, $G=0$ pour trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ qui déterminent ainsi l'équilibre non symétrique

3) Incrémenter $\Delta_0 := \Delta_0 + \delta\Delta$ et trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ à nouveau



4) et ainsi de suite jusqu'à ce que $\nexists$ de solution $\Rightarrow$ on a trouvé le point $[\tau_0, \Delta_c]$ de la courbe

5) Modifier la valeur de τ_0 et recommencer

<u>Idée:</u> $\Delta_0 = \Delta_m$, alors:

```
do τ_om down to 0
   do Δ_m := Δ_m + δΔ
      ⋮
   end do
end do
```

<u>Méthode choisie:</u> Newton:

$$H = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(x_n)$$

$$x = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Newton: $x_{n+1} = x_n - \left(Df(x_n)\right)^{-1} f(x_n)$

Dans nos notations:

$$x_{n+1} = x_n - \left(DH(x_n)\right)^{-1} H(x_n) \qquad : \text{Newton}$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(DH(x_0)\right)^{-1} H(x_n) \qquad : \text{corde} \ : \text{si } DH(x_n) \text{ n'est me fois pas définie.}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1}\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\cdot(-1)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\frac{1}{(\cdots)}$$

$$= \omega(\cdots)\frac{1}{(\cdots)^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\left(\tau_0+\Delta\left(1-\tfrac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right)$$

$$= \omega(\cdots)\cdot\frac{1}{\left(\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right)^2}\;\Delta\,(-1)\,\frac{1}{3}\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)$$

En général:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}\omega\left(\frac{N}{3}f\right) = \omega\left(\frac{N}{3}f\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta(1-\frac{1}{3}f)\right]^2}\frac{(-1)\Delta}{3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_i}f}$$

- $i=1$, $f = 1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2$: $\quad \omega\left(\frac{N}{3}f\right)\cdot\frac{1}{[\;\;]^2}\,\frac{-\Delta}{3}\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}_{=2}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\left(\frac{-2}{3}\Delta\right)$$

- $i=2$, $f=$ idem.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\left(-\frac{2}{3}\Delta\right)$$

$\Big]\ \ominus$

- $i=1$, $f = 1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\,\frac{4}{3}\Delta$$

- $i=2$, $f=$ idem.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\left(\frac{-2}{3}\Delta\right)$$

- $i=1$, $f = 1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\right]^2}\left(-\frac{2}{3}\Delta\right)$$

- $i=2$, $f=$ idem

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right) = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\frac{1}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\right]^2}\left(\frac{4}{3}\Delta\right)$$

Ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}F = 2\,\omega(\cdots) + (1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\omega(\cdots) + 4\,\omega(\cdots 2\cdots) - (1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\omega(\cdots 2\cdots)$$

$$= \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\left(2+(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{-2/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \checkmark\ \circledast$$

$$+\,\omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\left(4-(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{4/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \checkmark$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}F = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\left(2+(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{-2/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \circledast\ \checkmark$$

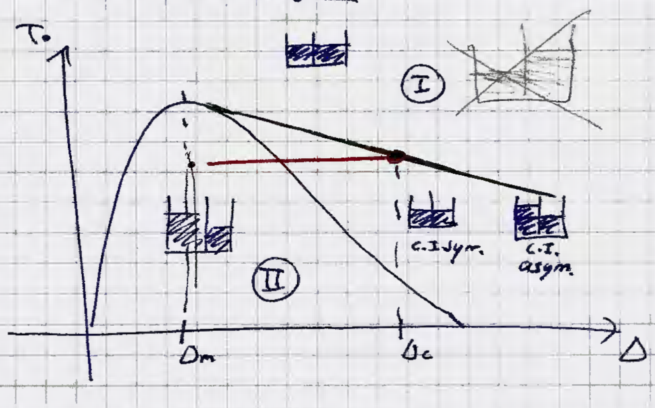
$$+\,\omega\left(\frac{N}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\left(-2+(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{2/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1-4\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \checkmark$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}G = \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\right)(\cdots)\text{ idem }\circledast$$

$$+\,\omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\left(-2+(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\frac{2/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \checkmark$$

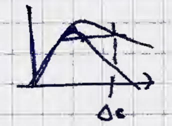
$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon_2}G = \circledast + \omega\left(\frac{N}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\left(4-(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\frac{4/3\,\Delta}{\left[\tau_0+\Delta\left(1-\frac{1}{3}(1+2\varepsilon_1-4\varepsilon_2)\right)\right]^2}\right)\ \checkmark$$

Trouver la courbe de la région I



1) partir d'une sol. asymétrique

2)



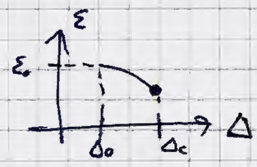
en $\Delta = \Delta_c$, elle n'est plus stable ! elle n'existe plus

i.e. résoudre

$F(N, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0 \longrightarrow$ donne $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

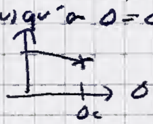
$G(N, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0 \longrightarrow$ "

par C.I. τ_0, Δ dans II, augmenter Δ jusqu'à ce que la sol. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ disparaît.



résoudre $F = 0$ cette fois avec les valeurs de ε trouvées jusqu'à ce que $\nexists$ de sol pour Δ_c.

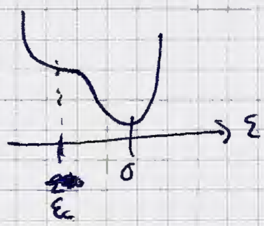
1) choisir τ_0, Δ pour être dans II ~~Δ_m~~ p. ex. $\Delta = \Delta_m$
2) résoudre $F = 0$, $G = 0$, ce qui donne ε_1 et ε_2
3) avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et τ_0 ainsi trouvé, résoudre $F = 0$, $G = 0$ (donne ε) pour Δ qui augmente, jusqu'à $\Delta = \Delta_c$



4) recommencer pour une autre valeur de τ_0

Méthode analytique :

$F = 0$ correspond à $F' = 0$ (flux nul ; ~ én. libre)
$G = 0$ $\qquad\qquad\qquad\quad$ $G' = 0$



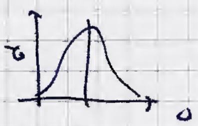
Résoudre :

$$\begin{cases} F' = 0 \\ G' = 0 \end{cases} \quad \text{(i.e. } F = 0, G = 0\text{)}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} F' = 0 \\ \nabla_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} G' = 0 \end{cases}$$

$\overline{\Sigma = 6}$ équations, ...

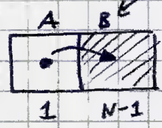
~~Trouver~~ Vérifier



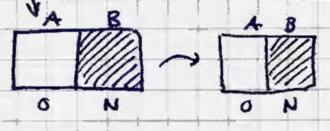
; maxdcl (prob1) = ... ?

Master Equation

$p(0,t+1)$: $p(0,t+1) = 1/N \; p(1,t)\, \omega(1) \quad + \; p(0,t)\,(1-\omega(N))$

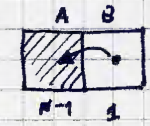


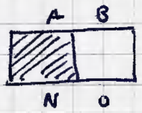
$p(1,t)$: proba d'avoir une particule ds A en t
$\omega(1)$: proba que la particule change d'urne,
p. ex. $\omega(1) = \omega_A(1)$: la dynamique va de gauche à droite. Mais la physique étant la même dans les 2 urnes, on a $\omega_A(i) = \omega_B(i) = \omega(i)$
$1/N$: les balles sont distinguables (numérotées) : comme il n'y a qu'une seule particule dans A, on a $1/N$ chance de sélectionner la bonne, d'où le facteur $1/N$.



$p(0,t)$: proba. avoir 0 particules ds A en t
$\omega(N)$: en fait, c'est $\omega_B(N) = \omega_A(N) = \omega(N)$: proba. que la particule bouge s'il y en a N dans B
$(1-\omega(N))$: proba. que la part. ne bouge pas.
normalisation : il y a N possibilités de sélectionner une balle dans B, donc le facteur $N/N = 1$.

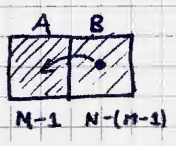
$p(N,t+1)$: $p(N,t+1) = \frac{1}{N}\, p(N-1,t)\,\omega(1) \quad + \quad p(N,t)\cdot(1-\omega(N))$





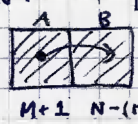
$\omega(i)$ est donc la probabilité qu'une particule change d'urne (n'importe laquelle) sachant que cette urne contient déjà i particules.

$p(M,t+1)$: $p(M,t+1) = \frac{1}{N}\cdot(N-(M-1))\; p(M-1,t)\; \omega(N-(M-1))$

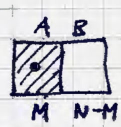


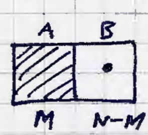
1 particule de B doit aller vers A, alors qu'il y en a déjà $M-1$ dans A
$1/N$: proba. de sélectionner une particule
$N-(M-1)$: particules que l'on est susceptible de trouver $\Big]\; \frac{1}{N}(N-(M-1))$

$$+ \frac{1}{N}(M+1)\; p(M+1,t)\; \omega(M+1)$$



$$+\, p(M,t)\cdot\left(\frac{M}{N}(1-\omega(M)) + \frac{N-M}{N}(1-\omega(N-M))\right)$$





la présence de ces 2 termes est une conséquence de la discernabilité.

$$p(M,t+1) = \begin{cases} 1/N\; P(1,t)\,\omega(1) + p(0,t)\,(1-\omega(N)) & , M=0 \\ 1/N\,(N-(M-1))\,P(M-1,t)\,\omega(N-(M-1)) + 1/N\,(M+1)\,P(M+1,t)\,\omega(M+1) & \\ \quad + p(M,t)\,\left(M/N\,(1-\omega(M)) + (N-M)/N\,(1-\omega(N-M))\right) & , M\in[1,N-1] \\ 1/N\; P(N-1,t)\,\omega(1) + P(N,t)\,(1-\omega(N)) & , M=N \end{cases}$$

Ceci se réécrit sous la forme d'une seule équation, en spécifiant que $p(-1,t) = p(N+1,t) = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} p(M,t+1) &= \frac{1}{N}(N-M+1)\,p(M-1,t)\,\omega(N-(M-1)) + \frac{1}{N}(M+1)\,p(M+1,t)\,\omega(M+1) \\ &\quad + p(M,t)\left(\frac{M}{N}(1-\omega(M)) + \frac{N-M}{N}(1-\omega(N-M))\right) \qquad , M\in[0,N] \\ p(-1,..) &= p(N+1,..) = 0 \end{aligned}}$$

$$\omega(M) = e^{-1/\tau(M/N)} = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\Delta(1-M/N)}\right)$$

Comment passer à une équation connue ? (Fokker-Planck, Maîtresse, etc.)
Questions : Markov ? Homogène dans le temps ?

On sait que $\omega(M)$ est la dynamique de (probabilité) passage d'une boule, c'est-à-dire que $\omega(M)$ est le taux de transition d'une urne sachant qu'on a M boules vers une urne de $M-1$ boules :

$$\omega(M) = \omega(M|M-1)$$

Il faudrait disposer des probabilités conditionnelles $P(n_1|n_2,t)$. On sait que $P(M,t+1)$ est la probabilité d'avoir M boules en $t+1$. Ainsi, la probabilité d'avoir M boules en $t+1$ sachant que l'on en avait $M-1$ en t est :

$$\begin{cases} P(M-1,t|M,t+1) = \frac{N-M+1}{N} P(M-1,t)\,\omega(N-M+1) \\ P(M+1,t|M,t+1) = \frac{M+1}{N} P(M+1,t)\,\omega(M+1) \\ P(M,t|M,t+1) = P(M,t)\left[\frac{M}{N}(1-\omega(M)) + \frac{N-M}{N}(1-\omega(N-M))\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad P(M-1,t|M,t+1) = \frac{N-(M-1)}{N} P(M-1,t)\,\omega(N-(M-1)|N-M)$$

$$P(M+1,t|M,t+1) = \frac{M+1}{N} P(M+1,t)\,\omega(M+1|M)$$

$$P(M,t|M,t+1) = P(M,t)\left(\frac{N}{M}(1-\omega(N|N-1)) + \frac{N-M}{N}(1-\omega(N-M|N-M-1))\right)$$

$$= P(M,t)\left(\underbrace{\frac{M}{N} - \frac{M}{N}\omega(N|N-1) + \frac{N-M}{N}}_{=\frac{M+N-M}{N}=1} - \frac{N-M}{N}\omega(N-M|N-M-1)\right)$$

$$= P(M,t)\left(1 - \frac{M}{N}\omega(M|M-1) - \frac{N-M}{N}\omega(N-M|N-M-1)\right)$$

Il faut arriver à écrire ces fonctions P sous la forme d'une seule fonction. On constate déjà :

$$P(i,t|j,t+1) = 0 \quad \text{si} \quad |i-j| > 1 \qquad : \text{processus "birth and death"}$$

Notons différemment la distribution de probabilité, avec X qui est la C.I. :

$$P(x,t|M,t+1) = \frac{N-x}{N} P(x,t)\,\omega(N-x|N-x-1) \qquad , x = M-1$$

$$P(x,t|M,t+1) = \frac{x}{N} P(x,t)\,\omega(x|x-1) \qquad , x = M+1$$

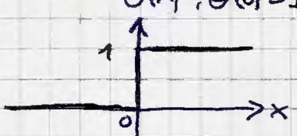
$$P(x,t|M,t+1) = P(x,t)\left(1 - \frac{x}{N}\omega(x|x-1) - \frac{N-x}{N}\omega(N-x|N-x-1)\right)$$

$$= P(x,t) - \frac{N-x}{N}P(x,t)\,\omega(N-x|N-x-1) - \frac{x}{N}P(x,t)\,\omega(x|x-1) \qquad , x = M$$

Ainsi :

$$P(x,t|M,t+1) = \Big(P(x,t)\,\delta_{x,M} + (1-2\delta_{x,M})\,\Theta(M-x)\,\frac{N-x}{N}P(x,t)\,\omega(N-x|N-x-1)$$
$$+ (1-2\delta_{x,M})\,\Theta(x-M)\,\frac{x}{N}P(x,t)\,\omega(x|x-1)\Big)\left(\delta_{x,M}+\delta_{x,M+1}+\delta_{x,M-1}\right)$$

$\Theta(x)$, $\Theta(0)=1$



$$= P(x,t)\underbrace{\left(\delta_{x,M}+\delta_{x,M+1}+\delta_{x,M-1}\right)}_{\text{processus "birth and death."}}\cdot\underbrace{\left(\delta_{x,M} + (1-2\delta_{x,M})\,\Theta(M-x)\frac{N-x}{N}\omega(N-x|N-x-1) + (1-2\delta_{x,M})\,\Theta(x-M)\frac{x}{N}\omega(x|x-1)\right)}_{:= f_N(x,M)}$$

On a ainsi :

$$P(x,t|M,t+1) = \underbrace{P(x,t)}_{\text{ça c'est l'inconnue}}\;\underbrace{f_N(x,M)\left(\delta_{x,M}+\delta_{x,M+1}+\delta_{x,M-1}\right)}_{\text{indép. du temps ? oui.}}$$

Le processus est-il de Markov ? Homogène dans le temps : oui par hyp. sur $P(x,t)$
Markov : − dans le temps : oui
− dans l'espace ... dépend que des p.p. voisins... ? oui ?

⇝ On peut utiliser l'équation maîtresse : avec (notant $M := Y$) :

$$\begin{cases} P(x,t|Y,t+1) = P(x,t)\,f_N(x,Y)\left(\delta_{x,Y}+\delta_{x,Y+1}+\delta_{x,Y-1}\right) \\ f_N(x,Y) = \delta_{x,Y} + (1-2\delta_{x,Y})\,\Theta(Y-x)\frac{N-x}{N}\omega(N-x|N-x-1) + (1-2\delta_{x,Y})\,\Theta(x-Y)\frac{x}{N}\omega(x|x-1) \end{cases}$$

On a ainsi; en utilisant l'homogénéité dans le temps et en faisant la limite du continu sur le temps

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x|y,t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \Big(\underbrace{P(x|z,t)}_{\neq 0 \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} z=x \\ z=x-1 \\ z=x+1 \end{smallmatrix}} \omega(z|y) - \underbrace{P(x|y,t)}_{\neq 0 \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} x=y \\ x=y+1 \\ x=y-1 \end{smallmatrix}} \omega(y|z) \Big)$$

Le passage à la limite de cette dernière équation donnerait :

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x|y,t) = \int_{\mathbb{R}} dz \Big(P(x|z,t)\, \omega(z|y) - P(x|y,t)\, \omega(y|z) \Big) \quad , \; z \in [0,N]$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} P(x|y,t) &= \int_0^N dz \Big(P(x|z,t)\, \omega(z|y) - P(x|y,t)\, \omega(y|z) \Big) \\
P(x|y,t) &= P(x,t)\, f_N(x,y) \big(\delta(x-y) + \delta(x-y-1) + \delta(x-y-1) \big) \\
f_N(x,y) &= \delta(x-y) + (1-2\delta(x-y))\, \theta(y-x) \frac{N-x}{N} w(N-x|N-x-1) + (1-2\delta(x-y))\, \theta(x-y) \frac{x}{N} w(x|x-1) \\
\omega(x|y) &= \omega(x)\, \delta(x-(y-1)) \\
w(x) &= \exp\left(-(\tau_0 + \Delta(1-x/N))^{-1}\right)
\end{aligned}}$$

Mais bon, c'est pas trop élégant de passer dans le continu spatialement car ensuite on doit prendre que les solutions entières. Aussi, c'est intéressant de voir la limite $N \to \infty$ ... dans ce cas, si on ne considère que des états assez mélangés les expressions se simplifient un peu. On peut essayer de faire les éqn. à 1 pas :

Résolution de l'équation maîtresse dans un cas particulier

$$P(x,t+1) = \frac{N-x+1}{N} P(x-1,t)\,\omega(N-x+1) + \frac{x+1}{N} P(x+1,t)\,\omega(x+1) + P(x,t)\left(\frac{x}{N}(1-\omega(x)) + \frac{N-x}{N}(1-\omega(N-x))\right)$$

avec $\omega(x)$ qui est la probabilité de transfer d'une unité, donc la probabilité que l'on passe de x à $x-1$ sachant que on avait x au départ. L'équation maîtresse ($P(x,t+1)$ est déjà une probabilité conditionnelle)

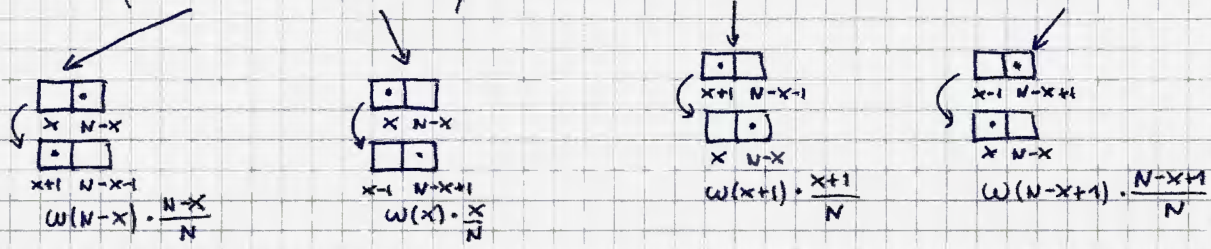
$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \sum_{x'\in\Sigma}\left(P(x',t)\,\omega(x'|x) - P(x,t)\,\omega(x|x')\right)$$

et comme on a un processus à 1 pas pour les ω, alors $\omega(x'|x)\neq 0 \Leftrightarrow x=x'$ ou $x'=x\pm1$, ainsi:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = P(x+1,t)\,\omega(x+1|x) - P(x,t)\,\omega(x|x+1) + P(x-1,t)\,\omega(x-1|x) - P(x,t)\,\omega(x|x-1)$$

On doit choisir à quelle dynamique on s'intéresse, par exemple celle de l'urne A, alors $\omega(x)$ représente la proba. d'avoir 1 transfer qui quitte l'urne A et comme $\omega(x)=\omega(x|x-1)$ alors on peut exprimer tous les taux de transition en terme des $\omega(x)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = -P(x,t)\cdot\left(\omega(x|x+1)+\omega(x|x-1)\right) + P(x+1,t)\,\omega(x+1|x) + P(x-1,t)\,\omega(x-1|x)$$



Les équations maîtresses à un pas doivent avoir la forme

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = g_{x-1}P_{x-1}(t) + r_{x+1}P_{x+1}(t) - (g_x + r_x)P_x(t),$$

donc:

$$g_x = \omega(N-x)\frac{N-x}{N} \quad ; \quad r_x = \omega(x)\frac{x}{N}$$

avec: $\omega(x) = \exp(-T(x/N)^{-1})$; $T(x/N) = T_0 + \Delta(1-x/N)$. Le problème est soluble et les solutions connues dans les cas
i) $g_x = g = r_x = r \quad \forall x$
ii) $g_x = g,\ r_x = 0 \quad \forall x$
iii) $g_x = 0,\ r_x = r \quad \forall x$.

Méthode de la fonction génératrice:

$$G(z,t) := \sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x P_x(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x \frac{\partial P_x}{\partial t}(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \underbrace{z^x}_{=zz^{x-1}} g_{x-1}P_{x-1}(t) + \sum_{x\in\mathbb{Z}} \underbrace{z^x}_{=z^{-1}z^{x+1}} r_{x+1}P_{x+1}(t) - \sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x (g_x+r_x)P_x(t)$$

$$= z\sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x P_x(t)\,g_x + \frac{1}{z}\sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x P_x(t)\,r_x - \sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x P_x(t)(g_x+r_x)$$

Pour continuer il faut simplifier cette expression, et en particulier enlever la dépendance en x des termes de gain et de perte. On prend donc des régimes limites soit $x\sim N$ soit $x\sim 0$. Prenons le premier cas qui correspond à l'urne A qui est presque pleine avec N balles tandis que l'urne B n'est à peine remplie que de quelques balles. On voit déjà que ce cas correspond à des temps suffisament courts. Dans ce cas:

$$\begin{cases} g_x = \frac{N-x}{N}\exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta(1-\frac{N-x}{N})}\right) = \varepsilon\exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta(1-\varepsilon)}\right) = g & ,\ \varepsilon\sim 0\ ,\ \varepsilon = \text{cte}\,|_x \\ r_x = \frac{x}{N}\exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta(1-x/N)}\right) = (1-\varepsilon)\exp\left(-\frac{1}{T_0+\Delta\varepsilon}\right) = r & ,\ \varepsilon\sim 0\ ,\ \varepsilon = \text{cte}\,|_x \end{cases}$$

ainsi:

$$\frac{\partial}{\partial t}G(z,t) = \left(zg + \frac{1}{z}r - g - r\right)G(z,t).$$

Avec la condition initiale en $t_0=0$ qui dit qu'on a $N-\varepsilon N$ particules, alors avec $P_x(t=t_0) = \delta_{x,N-\varepsilon N}$ (la C.I. est centrée autour des domaine de validité $\varepsilon=\text{cte}|_x$ de l'approx. précédente $g_x=g,\ r_x=r\ \forall x$)

$$G(z,t=0) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x\delta_{x,N-\varepsilon} = z^{N-\varepsilon N}$$

on résout:

$$G(z,t) = z^{N-\varepsilon N} e^{(gz+r/z-g-r)t}$$

Pour continuer, on doit encore faire des approximations car on ne sait pas résoudre pour $g\neq r$ (en fait, peut-être on y arrive aussi, mais il faudrait alors un peu creuser. Je connais les solutions des cas i) à iii), donc il faut juste voir à quelles approximations ils correspondent).

$\boxed{\text{Cas 1}}$ $\varepsilon = 0$: la solution est valide pour de petits temps aussi longtemps que le nombre de balles dans l'urne A est beaucoup plus grand que celui dans l'urne B. Dans ce cas on a:

$$g = 0 \quad ; \quad r = \exp(-1/T_0)$$

$$G(z,t) = z^N\exp(rt(1/z-1))$$

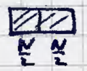
Il faut faire le développement de Laurent de $G(z,t)$, et ensuite égaler les coefficients avec la définition $G(z,t) = \sum z^x P_x(t)$. Le problème est qu'il y a une singularité essentielle en $z=0$.

Si on fait un développement de Laurent en $z=\alpha\sim 0$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
P_0^\alpha(t) &= e^{rt(1/\alpha-1)} && = O(e^t\cdot t^0)\\
P_1^\alpha(t) &= e^{rt(1/\alpha-1)}\, rt/\alpha^2 && = O(e^t\cdot t^1)\\
P_2^\alpha(t) &= e^{rt(1/\alpha-1)}\, rt(rt+2\alpha)/\alpha^2 && = O(e^t\cdot t^2)\\
&\vdots && \vdots\\
P_x^\alpha(t) &= \dots && = O(e^t t^x)
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que la probabilité de trouver x boules dans l'urne A décroît selon $e^t t^x$, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir X boules dans A décroît d'autant plus rapidement que x est grand, ce qui est conforme au sens physique car la probabilité que des boules passent dans l'autre urne est d'autant plus grande que cette première est pleine. De plus ces probabilités décroissent selon $\sim e^{rt}$, i.e. à température nulle $\tau_0=0$ plus lentement qu'à température infinie $\tau_0=\infty$, avec $r=\exp(-\tau_0^{-1})$. Les interprétations sont ainsi correctes.

$\boxed{\text{Cas 2}}$ $\varepsilon=1/2$: à nouveau, la solution reste valide aussi longtemps que $\varepsilon=\frac{N-x}{N}\sim 1/2$. En fait, cette situation décrit un équilibre qui est assuré par la dépendance en x de g_x et r_x, et comme nous avons justement supprimé cette dépendance, on a plus un modèle qui va décrire l'équilibre... peut-être que ce modèle décrit encore simplement les fluctuations dans un sens. Avec $\varepsilon=1/2$ on a :



$$g=\tfrac12\exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\delta/2}\right)\quad;\ r=\tfrac12\exp\left(-\frac{1}{\tau_0+\delta/2}\right)\quad;\ g=r:=g$$

Ainsi avec la condition initiale $P_x(t=0)=\delta_{x,N-N/2}$

$$G(z,t)=z^{N/2}e^{g(z+1/z)t}e^{-2tg}.$$

Or :

$$e^{(z+1/z)t/2}=\sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x I_x(t)\qquad I_x(t)\text{ : fonction de Bessel modifiée}\qquad (*)$$

que l'on insère dans $G(z,t)$ pour obtenir :

$$G(z,t)=z^{N/2}e^{-2tg}\sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x I_x(2t/g)\overset{\text{déf.}}{=}\sum_{x\in\mathbb{Z}} z^x P_x(t),$$

d'où :

$$P_x(t)=z^{N/2}e^{-2tg}I_x(2t/g).$$

On peut trouver l'expression de $I_x(2t/g)$ grâce à sa définition $(*)$, ce qui donne :

$$I_x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t/2)^{2k+x}}{k!\,(k+x)!}\quad,\ x\geq 0\ ,$$

et donc :

$$P_x(t)=z^{N/2}e^{-2tg}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t/g)^{2k+x}}{k!\,(k+x)!}=z^{N/2}e^{-2t\frac12 e^{-\frac{1}{\tau_0+\delta/2}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^{2k+x}}{k!\,(k+x)!}\exp\left(\frac{2k+x}{\tau_0+\delta/2}\right)$$

$$P_x(t)=z^{N/2}\underbrace{\exp\Big(t\cdot\underbrace{\exp(-1/(\tau_0+\delta/2))}_{=\begin{cases}0, & \tau_0+\delta/2=0\\ 1, & \tau_0+\delta/2=\infty\end{cases}}\Big)}_{=\begin{cases}1, & \tau_0+\delta/2=0\\ e^t, & \tau_0+\delta/2=\infty\end{cases}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^{2k+x}}{k!\,(k+x)!}\underbrace{\exp\left(\frac{2k+x}{\tau_0+\delta/2}\right)}_{=\begin{cases}\infty, & \tau_0+\delta/2=0\\ 1, & \tau_0+\delta/2=\infty\end{cases}}\quad |\text{cte}|_t$$

En particulier :

$$P_x(t)\overset{t\sim 0}{\propto}\frac{t^x}{x!}\longrightarrow 0$$

et avec $I_x(t)\overset{t\to\infty}{\propto}e^t/\sqrt{2\pi t}$:

$$P_x(t)\overset{t\to\infty}{\propto}z^{N/2}e^{-2tg}\frac{e^{2t/g}}{\sqrt{2\pi\,2t/g}}=z^{N/2}e^{2t(1/g-1)}\sqrt{\frac{g}{4\pi t}}$$

$$=z^{N/2}\exp\left(2t\left(2\exp\left(\frac{1}{\tau_0+\delta/2}\right)-1\right)\right)\frac{e^{-\frac12\frac{1}{\tau_0+\delta/2}}}{\sqrt{8\pi t}}$$

Équation dérivation (livre)

nulle var. $\downarrow$; $n = m - R$ $\quad$ $R = \frac{1}{2}(N_I + N_{II})$; $n = \frac{1}{2}(N_I - N_{II})$; $2R = \#$ tot. balles

$$P(n_0|n, s+1) = \frac{R-(n-1)}{2R} P(n_0|n-1, s) + \frac{R+(n+1)}{2R} P(n_0|n+1; s)$$

On étudie plutôt $P(n_0\Delta | n\Delta; s\tau)$ dans le formalisme de la marche aléatoire. Soit

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta^2}{2\tau} = D \quad ; \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} n\Delta = x \quad ; \lim_{\substack{n_0\to\infty \\ \Delta\to 0}} n_0\Delta = x_0$$

alors:

$$P(n_0\Delta | n\Delta; (s+1)\tau) = \frac{R-(n-1)}{2R} P(n_0\Delta | (n-1)\Delta, s\tau) + \frac{R+(n+1)}{2R} P(n_0\Delta | (n+1)\Delta, s\tau)$$

On introduit encore les grandeurs analogues à celles intervenant pour la marche aléatoire:

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \tau\to 0}} (R\tau)^{-1} = \gamma \quad ; \lim_{\substack{s\to\infty \\ \tau\to 0}} s\tau = t$$

Comme on a encore des R qui interviennent, on les remplace par $R = \frac{1}{\gamma\tau}$ pour obtenir:

$$P(x_0 | n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1/\gamma\tau - (n-1)}{2\, 1/\gamma\tau} P(x_0 | (n-1)\Delta, s\tau) + \frac{1/\gamma\tau + (n+1)}{2\, 1/\gamma\tau} P(x_0 | (n+1)\Delta, s\tau),$$

et dans les notations suivantes on laisse tomber le x_0 redondant:

$$P(n\Delta, (s+1)\tau) = \frac{1/\gamma\tau - (n-1)}{2\, 1/\gamma\tau} P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{1/\gamma\tau + (n+1)}{2\, 1/\gamma\tau} P((n+1)\Delta, s\tau)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\tau}\frac{\tau}{\gamma} P((n-1)\Delta, s\tau) - \frac{n}{2(\gamma\tau)^{-1}} P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2(\gamma\tau)^{-1}} P((n-1)\Delta, s\tau)$$

$$+ \frac{1}{2} P((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{n}{2(\gamma\tau)^{-1}} P((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2(\gamma\tau)^{-1}} P((n+1)\Delta, s\tau)$$

$$= \frac{1}{2} P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{1}{2} P((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{\gamma\tau}{2} n P((n+1)\Delta, s\tau) - \frac{\gamma\tau}{2} n P((n-1)\Delta, s\tau)$$

$$+ \frac{\gamma\tau}{2} P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{\gamma\tau}{2} P((n+1)\Delta, s\tau)$$

$$\Rightarrow P(n\Delta, (s+1)\tau) - P(n\Delta, s\tau) = -P(n\Delta, s\tau) + \tfrac{1}{2} P((n-1)\Delta, s\tau) + \tfrac{1}{2} P((n+1)\Delta, s\tau) + \frac{\gamma\tau}{2} P((n+1)\Delta, s\tau)\cdot n$$

$$- \frac{\gamma\tau}{2} n P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{\gamma\tau}{2} P((n-1)\Delta, s\tau) + \frac{\gamma\tau}{2} P((n+1)\Delta, s\tau)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{P(n\Delta, (s+1)\tau) - P(n\Delta, s\tau)}{\tau}}_{= \frac{\partial P}{\partial t}(x,t)} = + \frac{1}{2\tau}\Big(P((n+1)\Delta, s\tau) - 2P(n\Delta, s\tau) + P((n-1)\Delta, s\tau)\Big)$$

$$\underbrace{+ \frac{n\gamma}{2}\Big(P((n+1)\Delta, s\tau) - P((n-1)\Delta, s\tau)\Big) + \frac{\gamma}{2}\Big(P((n-1)\Delta, s\tau) + P((n+1)\Delta, s\tau)\Big)}_{}$$

$$= \frac{1\cdot\gamma}{2}\Big((n+1) P((n+1)\Delta, s\tau) - n P((n-1)\Delta, s\tau) + P((n-1)\Delta, s\tau)\Big)$$

$$= \frac{1\cdot\gamma}{2}\Big((n+1) P((n+1)\Delta, s\tau) - (n-1) P((n-1)\Delta, s\tau)\Big)$$

$$= \frac{\Delta^2}{2\tau} \frac{1}{\Delta^2}\Big(P((n+1)\Delta, s\tau) - 2P(n\Delta, s\tau) + P((n-1)\Delta, s\tau)\Big)$$

$$+ \gamma \cdot \frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P((n+1)\Delta, s\tau) - (n-1)\Delta P((n-1)\Delta, s\tau)\Big)$$

$$= \underbrace{\lim_{\substack{\Delta\to 0 \\ \tau\to 0}} \left(\frac{\Delta^2}{2\tau}\right)}_{= D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial x}\big(x P(x,t)\big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) + \gamma \frac{\partial}{\partial x}\big(x P(x,t)\big)}$$

Dérivation de l'équation de Fokker-Planck

1) ces calculs
2) nlle fction ω

Analogies : $\begin{cases} N = 2R \\ M = m \\ \varepsilon = \dfrac{N_A - N_B}{2N} = \dfrac{n}{2R} \end{cases}$

Je choisis de définir : $n = 1/2\,(N_A - N_B)$
$R = 1/2\,(N_A + N_B)$

On s'intéresse à la probabilité conditionnelle de trouver $N_A = M$ boules dans A au temps s en partant de M_0 :
$n = M - R$ car : $1/2\,(N_A - N_B) = M - 1/2\,(N_A + N_B) \Rightarrow N_A = M$

L'équation maîtresse dans ces nouvelles variables est $(N = 2R\ ,\ M = n + R)$:

$$P(n,t+1) = \frac{2R - n - R + 1}{2R} P(n-1,t)\,\omega(R-(n-1)) + \frac{n+R+1}{2R} p(n+1,t)\,\omega(n+R+1)$$
$$+ p(n\ ,t)\left\{ \frac{n+R}{2R}(1-\omega(n+R)) + \frac{2R-n-R}{2R}(1-\omega(R-n))\right\}$$

$$= \frac{R-(n-1)}{2R}\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + \frac{n+R+1}{2R}\omega(n+R+1)\,P(n+1,t)$$
$$+ (1-\omega(n+R))\frac{n+R}{2R}P(n,t) + (1-\omega(R-n))\frac{R-n}{2R}P(n,t)$$

$$= \frac{1}{2}\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + 1/2\,\omega(n+R+1)\,P(n+1,t)$$
$$- \frac{(n-1)}{2R}\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + \frac{n+1}{2R}\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t)$$
$$+ \underbrace{\frac{\cancel{n}+R}{2R}P(n,t) + \frac{-\cancel{n}+R}{2R}P(n,t)}_{=P(n,t)} - \omega(n+R)\frac{R+n}{2R}P(n,t) - \omega(R-n)\frac{R-n}{2R}P(n,t)$$

$$= 1/2\,\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + 1/2\,\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) - \frac{(n-1)}{2R}\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t)$$
$$+ \frac{n+1}{2R}\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) + P(n,t) - \frac{1}{2}\omega(R+n)\,P(n,t) - 1/2\,\omega(R-n)\,P(n,t)$$
$$- \frac{n}{2R}\omega(n+R)\,P(n,t) + \frac{n}{2R}\omega(R-n)\,P(n,t)$$

$$= \frac{1}{2R}\Big(-(n-1)\,\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + (n+1)\,\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) - n\,\omega(n+R)\,P(n,t) + n\,\omega(R-n)\,P(n,t)\Big)$$
$$+ 1/2\Big(\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + \omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) - \omega(R+n)\,P(n,t) - \omega(R-n)\,P(n,t)\Big)$$
$$+ P(n,t)$$

$\Longrightarrow$

$$P(n,t+1) - P(n,t) = \frac{1}{2R}\Big((n+1)\,\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) - (n-1)\,\omega(R-(n-1))\,P(n-1,t) + n\,P(n,t)\,(\omega(R-n) - \omega(R+n))\Big)$$
$$+ 1/2\Big(\omega(R+(n+1))\,P(n+1,t) - P(n,t)\,(\omega(R+n) + \omega(R-n)) + \omega(R-(n-1))\,P(n-1,t)\Big)$$

On vérifie déjà que si $\omega = 1$ on retrouve le modèle de Ehrenfest, donc les calculs semblent déjà corrects.
On utilise $P(n\Delta,(s+1)\tau)$ à la place de $P(n,t+1)$ comme ds le modèle de Ehrenfest par analogie avec la marche aléatoire et on a :

$$\underbrace{\frac{P(n\Delta,(s+1)\tau) - P(n\Delta,s\tau)}{\tau}}_{= \frac{\partial P}{\partial t}(x,t)} = \frac{1}{2R\tau}\Big((n+1)\,\omega(R+(n+1))\,P((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)\,\omega(R-(n-1))\,P((n-1)\Delta,s\tau)$$
$$+ n\,P(n\Delta,s\tau)\,(\omega(R-n) - \omega(R+n))\Big)$$
$$+ 1/2\tau\Big(\omega(R+(n+1))\,P((n+1)\Delta,s\tau) - P(n\Delta,s\tau)\,(\omega(R+n) + \omega(R-n))$$
$$+ \omega(R-(n-1))\,P((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$

avec :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta^2}{2\tau} = D\ ;\ \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\to 0}} n\Delta = x\ ;\ \lim_{\substack{R\to\infty\\ \tau\to 0}}\frac{1}{R\tau} = \gamma\ ;\ \lim_{\substack{s\to\infty\\ \tau\to 0}} s\tau = t\ ;\ R = \frac{1}{\gamma\tau}$$

on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \gamma\cdot\frac{1}{2\Delta}\Big(&(n+1)\Delta\,\omega(R+(n+1))\,P((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)\Delta\,\omega(R-(n-1))\,P((n-1)\Delta,s\tau) \\ &+ n\Delta\,P(n\Delta,s\tau)\,(\omega(R-n) - \omega(R+n))\Big) \\ + \underbrace{\frac{\Delta^2}{2\tau}}_{\to D}\frac{1}{\Delta^2}\Big(&\omega(R+(n+1))\,P((n+1)\Delta,s\tau) - P(n\Delta,s\tau)\,(\omega(R+n) + \omega(R-n)) + \omega(R-(n-1))\,P((n-1)\Delta,s\tau)\Big)\end{aligned}}$$

Dans cette dernière expression, à nouveau on voit que si $\omega = 1$ on a le modèle de Ehrenfest. Il ne semble pas possible de trouver une équation de Fokker-Planck à partir de ω en toute généralité. Il est peut-être nécessaire de faire quelques approximations. Ainsi :

$T(M/N)$: arrive pas à mettre x en évidence..

$$\omega(y) = \exp(-1/T(y)) = 1 - \frac{1}{T(y)} + \frac{1}{2}\frac{1}{T(y)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{T(y)^3} + O(1/T^4)$$

La seule chose envisageable est un développement en puissances de $1/\tau$, i.e. à haute "température", ou plutôt à haute température renormalisée T/mgh, i.e. à haute température T ou faible masse m ou faible hauteur de fenêtre. Le premier terme de cette série est connu car il donne l'équation de Ehrenfest :

$$T(Y) = T_0 + \delta(1 - Y/N)$$

$$\frac{1}{T(Y)} = \frac{1}{T_0+\delta(1-Y/N)} = \frac{1}{T_0}\frac{1}{1+\frac{\delta}{T_0}(1-Y/N)} = \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + \frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2 - \frac{\delta^3}{T_0^3}(1-Y/N)^3\right) + O\Big(\underbrace{\frac{\delta^4}{T_0^5}}_{\delta < T_0 \Rightarrow \delta/T_0 \ll 1.}\Big)$$

$$\begin{aligned}
\omega(Y) = 1 &- \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + \frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2 - \frac{\delta^3}{T_0^3}(1-Y/N)^3 + \dots\right) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{T_0^2}\left(1 - \frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + \frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2 - \frac{\delta^3}{T_0^3}(1-Y/N)^3 + \dots\right)^2 \\
&- \frac{1}{6}\frac{1}{T_0^3}\left(1 - \frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + \frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2 - \frac{\delta^3}{T_0^3}(1-Y/N)^3 + \dots\right)^3 + \dots \\
= 1 &- \frac{1}{T_0} + \frac{\delta}{T_0^2}(1-Y/N) - \frac{\delta^2}{T_0^3}(1-Y/N)^2 + \frac{\delta^3}{T_0^4}(1-Y/N)^4 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{1}{T_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + 3\frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2 - \underbrace{4\frac{\delta^3}{T_0^3}(1-Y/N)^3}_{O(T_0^{-5})} + \dots\right) \\
&- \frac{1}{6}\frac{1}{T_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta}{T_0}(1-Y/N) + \underbrace{6\frac{\delta^2}{T_0^2}(1-Y/N)^2}_{O(T_0^{-5})} + \dots\right) + O(T_0^{-5}) \\
= 1 &- 1/T_0 + \delta/T_0^2(1-Y/N) - \frac{\delta^2}{T_0^3}(1-Y/N)^2 + \delta^3/T_0^4(1-Y/N)^4 + 1/2\, 1/T_0^2 - \delta/T_0^3(1-Y/N) + \frac{3}{2}\frac{\delta^2}{T_0^4}(1-Y/N)^2 \\
&- 1/6\frac{1}{T_0^3} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{T_0^4}(1-Y/N) + O(T_0^{-5}) \\
= 1 &- \frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0^2}\left(\delta(1-Y/N) + 1/2\right) + \frac{1}{T_0^3}\left(-\delta^2(1-Y/N)^2 - \delta(1-Y/N) - 1/6\right) \\
&+ \frac{1}{T_0^4}\left(\delta^3(1-Y/N)^4 + 3/2\,\delta^2(1-Y/N)^2 + 1/2\,\delta(1-Y/N)\right) + O(T_0^{-5})
\end{aligned}$$

On suppose que la solution peut s'écrire sous la forme :

$$P(x,t) = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{T_0^k}P^{(k)}(x,t)$$

et on écrit une équation pour chaque ordre en T_0^{-k} (on pourrait aussi écrire $P(x,t) = P^{(0)}(x,t) + T_0^{-1}\sum_{k\geq 0}(\delta/T_0)^k P^{(k)}$, mais alors l'égalité des coefficients pour dégager des équations serait un peu difficile). On a ainsi :

$\boxed{O(T_0^0)}$: dans ce cas $\omega(Y) = 1$ et alors on a le modèle de Ehrenfest :

$$\frac{\partial P^{(0)}}{\partial t}(x,t) = \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(x P^{(0)}(x,t)\right) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}P^{(0)}(x,t) := E(\gamma, D)\, P^{(0)}(x,t),$$

où on a introduit l'opérateur différentiel de Ehrenfest $E(\cdot,\cdot)$ défini ci-dessus. La solution de l'éq. de Ehrenfest est connue et est :

$$\overset{(0)}{P}(x_0|x,t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\gamma t}}}\exp\left(-\frac{\gamma}{D}\frac{(x-x_0e^{-\gamma t})^2}{2(1-e^{-\gamma t})}\right)$$

$\boxed{O(T_0^{-1})}$: dans ce cas on utilise la solution $T_0^{-1}P^{(1)}(x,t)$, et comme $\omega(Y) = -1/T_0$ $\forall Y$ on voit que $1/T_0$ se simplifie si bien que l'on reste avec la même équation qu'avant au signe près de D et de γ :

$$\frac{\partial P^{(1)}}{\partial t}(x,t) = E(-\gamma, -D)\, P^{(1)}(x,t).$$

La solution est la même avec le signe de γ et de D qui ont changé. C'est embêtant car pour t suffisament grand la grandeur $1-e^{-2\gamma t}$ devient négative ce qui génère une partie imaginaire ainsi qu'une explosion de la solution car l'exponentielle devient positive (i.e. $\exp(-\gamma/D\cdots)$). En fait, $\forall t \geq 0$ $P^{(1)}(x,t) \in \mathbb{C}$, avec une limite $\lim_{t\to 0} P^{(1)}(x,t) = 0$, que ce soit à gauche ou à droite.

$\boxed{O(T_0^{-2})}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t}(x,t) = \gamma\frac{1}{2\Delta}\Big(&(n+1)\Delta \overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)\left(\delta\left(1-\frac{R+(n+1)}{N}\right)+1/2\right) - (n-1)\Delta\overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)\left(\delta\left(1-\frac{R-(n-1)}{N}\right)+1/2\right) \\
&+ n\Delta\overset{(2)}{P}(n\Delta, s\tau)\left(\delta\left(\cancel{1}-\frac{R-n}{N}\right)+\cancel{1/2} - \delta\left(\cancel{1}-\frac{R+n}{N}\right)-\cancel{1/2}\right)\Big) \\
+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big(&\overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)\left(\delta\left(1-\frac{R+(n+1)}{N}\right)+1/2\right) - \overset{(2)}{P}(n\Delta, s\tau)\left(\delta\left(1-\frac{R+\cancel{n}}{N}\right)+1/2 + \delta\left(1-\frac{R-\cancel{n}}{N}\right)+\frac{1}{2}\right) \\
&+ \overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)\left(\delta\left(1-\frac{R-(n-1)}{N}\right)+1/2\right)\Big) \\
= \gamma\frac{1}{2\Delta}\Big(&(n+1)\Delta\overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)(\delta+1/2) - (n-1)\Delta\overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)(\delta+1/2) \\
&- \delta\frac{R+(n+1)}{N}\overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)(n+1)\Delta - \delta\frac{R-(n-1)}{N}\overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)(n-1)\Delta \\
&+ n\Delta\overset{(2)}{P}(n\Delta, s\tau)\left(\delta\cdot\frac{n}{N} + \delta\frac{n}{N}\right)\Big) \\
+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big(&\overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)(\delta+1/2) - \overset{(2)}{P}(n\Delta, s\tau)(\delta+1/2+\delta+1/2) + \overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)(\delta+1/2) \\
&- \overset{(2)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)\,\delta\frac{R+(n+1)}{N} - \overset{(2)}{P}(n\Delta, s\tau)\left(-\delta\frac{R}{N} - \delta\frac{R}{N}\right) + \overset{(2)}{P}((n-1)\Delta, s\tau)\left(-\delta\frac{R-(n-1)}{N}\right)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \gamma(\delta+1/2)\,\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+D(\delta+1/2)\,\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - 2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) + P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big(-\delta\frac{R+(n+1)}{N}(n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - \delta\frac{R-(n-1)}{N}(n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)$$
$$+2\delta\frac{1}{N}n^2\Delta P^{(2)}(n\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(-\delta\frac{R+(n+1)}{N}P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + 2\delta\frac{R}{N}P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - \delta\frac{R-(n-1)}{N}P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E(\gamma(\delta+1/2),D(\delta+1/2))\,P^{(2)}(x,t)$$
$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big(-\delta\frac{R}{N}(n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - \delta\frac{R}{N}(n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)$$
$$-\frac{\delta}{N}(n+1)^2\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + \frac{\delta}{N}(n-1)^2\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau) + 2\frac{\delta}{N}n^2\Delta P^{(2)}(n\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(-\delta\frac{R}{N}P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + 2\delta\frac{R}{N}P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - \delta\frac{R}{N}P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)$$
$$-\frac{\delta}{N}(n+1)P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + \frac{\delta}{N}(n-1)P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E(\gamma(\delta+1/2),D(\delta+1/2))\,P^{(2)}(x,t)$$
$$-\gamma\delta\frac{R}{N}\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+\gamma\delta\frac{1}{N}\frac{1}{2\Delta}\Big(-(n+1)^2\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + (n-1)^2\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau) + 2n^2\Delta P^{(2)}(n\Delta,s\tau)\Big)$$
$$-D\delta\frac{R}{N}\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - 2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) + P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+D\delta\frac{1}{N}\frac{1}{\Delta^2}\Big(-(n+1)P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + (n-1)P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E(\gamma(\delta+1/2),D(\delta+1/2))\,P^{(2)}(x,t) - \gamma\delta\frac{R}{2R}\frac{\partial}{\partial x}(xP^{(2)}(x,t)) - D\delta\frac{R}{2R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P^{(2)}(x,t)$$
$$+\gamma\delta\frac{1}{2R}\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(-(n+1)^2\Delta^2P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + 2n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) + (n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+D\delta\frac{1}{2R}\frac{1}{\Delta}\frac{1}{\Delta^2}\Big(-(n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + (n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E\big(\tfrac12\gamma(\delta+1),\tfrac12 D(\delta+1)\big)\,P^{(2)}(x,t)$$
$$+\frac12\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(-(n+1)^2\Delta^2P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + 2n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) + (n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+\frac12 D\gamma\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{\Delta^2}\Big(-(n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + (n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E(1/2\,\gamma(\delta+1),1/2\,D(\delta+1))\,P^{(2)}(x,t)$$
$$+\frac12\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(-(n+1)^2\Delta^2P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) + n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - (n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$+\frac12\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) + 2(n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$-\frac12 D\gamma\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{\Delta^2}\Big((n+1)\Delta P^{(2)}((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)\Delta P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= E(1/2\,\gamma(\delta+1),1/2\,D(\delta+1))\,P^{(2)}(x,t) - 1/2\,\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}(P^{(2)}(x,t)\cdot x^2) - 1/2\,D\gamma\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xP^{(2)}(x,t))$$
$$+1/2\,\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - 2(n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$

Introduisons l'opérateur de Fokker-Planck défini par:

$$F(a(x),b(x)) = -\frac{\partial}{\partial x}a(x) + 1/2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}b(x),$$

alors l'opérateur de Ehrenfest E en est un cas particulier pour $a(x)=-\gamma x$ et $b(x)=2D$, c'est-à-dire que $F(-\gamma x,2D)=E(\gamma,D)$, de sorte que l'on a:

$$\frac{\partial P^{(2)}}{\partial t}(x,t) = F(-1/2\,\gamma(\delta+1)x,\,D(\delta+1))\,P^{(2)}(x,t) - 1/2\,\gamma^2\delta\overbrace{\frac{\tau}{\Delta}}^{=\frac{\Delta}{2}\frac{2\tau}{\Delta^2}=\frac{\Delta}{2}D\xrightarrow{\Delta\to0}0}\frac{\partial}{\partial x}(x^2P^{(2)}(x,t)) - 1/2\,D\gamma\delta\overbrace{\frac{\tau}{\Delta}}^{=\frac12\Delta D\xrightarrow{\Delta\to0}0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xP^{(2)}(x,t))$$
$$+1/2\,\gamma^2\delta\frac{\tau}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big(n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - 2(n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$
$$= F(-1/2\,\gamma(\delta+1)x,\,D(\delta+1))\,P^{(2)}(x,t) + 1/4\,\gamma^2\delta D\frac{\Delta}{2}\Big(n^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau) - (n-1)^2\Delta^2P^{(2)}(n\Delta,s\tau)\Big)$$
$$-1/8\,\gamma^2\delta D\Delta\quad(n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)$$
$$= F(-1/2\,\gamma(\delta+1)x,\,D(\delta+1))\,P^{(2)}(x,t) + 1/8\,\gamma^2\delta D\overset{\to0}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x}(x^2P^{(2)}(x,t))$$
$$-1/8\,\gamma^2\delta D\underset{\to0}{\Delta}\underbrace{(n-1)^2\Delta^2P^{(2)}((n-1)\Delta,s\tau)}_{\to x^2P^{(2)}(x,t)}$$

En résumé, on a trouvé aux 3 premiers ordres :

$$O(T_0^0):\quad \partial_t P^{(0)}(x,t) = F(-\gamma x, 2D)\, P^{(0)}(x,t)$$
$$O(T_0^1):\quad \partial_t P^{(1)}(x,t) = F(\gamma x, -2D)\, P^{(1)}(x,t)$$
$$O(T_0^2):\quad \partial_t P^{(2)}(x,t) = F(-\tfrac{1}{2}\gamma(\delta+1)x,\ D(\delta+1))\, P^{(2)}(x,t).$$

Essayons encore l'ordre suivant pour voir si apparait une certaine structure aux différents ordres qui pourrait éventuellement permettre une resommation.

$$= -\delta^2-\delta-\tfrac{1}{6} - \delta^2\left(-2\frac{R+(n+1)}{N} + \frac{(R+(n+1))^2}{N^2}\right) + \delta\frac{R+(n+1)}{N}$$

$\boxed{O(T_0^{-3})}$:

$$\frac{\partial P^{(3)}}{\partial t}(x,t) = \gamma\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta \overset{(3)}{P}((n+1)\Delta, s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R+(n+1)}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R+(n+1)}{N}\Big) - 1/6\Big)$$
$$-(n-1)\Delta\overset{(3)}{P}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R-(n-1)}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R-(n-1)}{N}\Big) - 1/6\Big)$$
$$+ n\Delta\overset{(3)}{P}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R-n}{N}\Big)^2 - \delta\Big(\cancel{1}-\frac{R-n}{N}\Big) - \cancel{1/6} + \delta^2\Big(1-\frac{R+n}{N}\Big)^2 + \delta\Big(\cancel{1}-\frac{R+n}{N}\Big) + \cancel{1/6}\Big)\Big)$$
$$+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big(\overset{(3)}{P}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R+(n+1)}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R+(n+1)}{N}\Big) - 1/6\Big)$$
$$-\overset{(3)}{P}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R+n}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R+\cancel{n}}{N}\Big) - \frac{1}{6} - \delta^2\Big(1-\frac{R-n}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R-\cancel{n}}{N}\Big) - 1/6\Big)$$
$$+\overset{(3)}{P}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-\frac{R-(n-1)}{N}\Big)^2 - \delta\Big(1-\frac{R-(n-1)}{N}\Big) - 1/6\Big)\Big)$$

$$= \gamma\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2-\delta-1/6 + \delta\frac{R}{N} + \delta\frac{1}{N}(n+1) + 2\delta^2\frac{R}{N} + 2\delta^2\frac{1}{N}(n+1)$$
$$-\frac{\delta^2}{N^2}\big(R^2+(n+1)^2+2R(n+1)\big)\Big)$$
$$-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1-2\frac{R-(n-1)}{N} + \frac{R^2+(n-1)^2-2R(n-1)}{N^2}\Big) - \delta + \delta\frac{R-(n-1)}{N} - 1/6\Big)$$
$$+ n\Delta P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(\cancel{1} + \frac{(R-n)^2}{N^2} - 2\frac{\cancel{R}-n}{N}\Big) - \delta\frac{n}{N} + \delta^2\Big(\cancel{1} + \frac{(R+n)^2}{N^2} - 2\frac{\cancel{R}+n}{N}\Big) - \delta\frac{n}{N}\Big)$$
$$+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1+\frac{(R+(n+1))^2}{N^2} - 2\frac{R+(n+1)}{N}\Big) - \delta + \delta\frac{R+(n+1)}{N} - 1/6\Big)$$
$$-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1+\frac{(R+n)^2}{N^2} - 2\frac{R+\cancel{n}}{N}\Big) - \delta + \delta\frac{R}{N} - 1/6 - \delta^2\Big(1+\frac{(R-n)^2}{N^2} - 2\frac{R-\cancel{n}}{N}\Big)$$
$$-\delta + \delta\frac{R}{N} - 1/6\Big)$$
$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\Big(1+\frac{(R-(n-1))^2}{N^2} - 2\frac{R-(n-1)}{N}\Big) - \delta + \delta\frac{R-(n-1)}{N} - 1/6\Big)\Big)$$

$$= \gamma\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2-\delta-1/6 + \delta\frac{R}{N} + \delta\frac{1}{N}(n+1) + 2\delta^2\frac{R}{N} + 2\delta^2\frac{1}{N}(n+1)$$
$$-\frac{\delta^2}{N^2}R^2 - \delta^2\frac{1}{N^2}(n+1)^2 - \delta^2\frac{2R}{N^2}(n+1)\Big)$$
$$-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2-\delta-1/6 + 2\delta^2\frac{R-(n-1)}{N} - \delta^2\frac{R^2+(n-1)^2-2R(n-1)}{N^2} + \delta\frac{R}{N}$$
$$-\delta\frac{n-1}{N}\Big)$$
$$+ n\Delta P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{\cancel{R^2}+\cancel{n^2}-2Rn}{N^2} + 2\delta^2\frac{-n}{N} - 2\delta\frac{n}{N} + \delta^2\frac{\cancel{R^2}+\cancel{n^2}+2Rn}{N} - 2\delta^2\frac{n}{N}\Big)$$
$$+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2 - \delta^2\frac{R^2+(n+1)^2+2R(n+1)}{N^2} + 2\delta^2\frac{R}{N} + 2\delta^2\frac{1}{N}(n+1) - \delta + \delta\frac{R}{N}$$
$$+\delta\frac{1}{N}(n+1) - 1/6\Big)$$
$$-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2 - \delta^2\frac{R^2+n^2+2Rn}{N^2} + 2\frac{R}{N}\delta^2 - \delta + \delta\frac{R}{N} - 1/6 - \delta^2 - \delta^2\frac{R^2+n^2-2Rn}{N^2}$$
$$+2\delta^2\frac{R}{N} - \delta + \delta\frac{R}{N} - 1/6\Big)$$
$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2 - \delta^2\frac{1}{N^2}\big(R^2+(n-1)^2-2R(n-1)\big) + 2\delta^2\frac{R}{N} - 2\delta^2\frac{n-1}{N} - \delta$$
$$+\delta\frac{R}{N} - \delta\frac{n-1}{N} - 1/6\Big)\Big)$$

$$= F\big(-\gamma(-\delta^2-\delta-1/6)x,\ 2D(-\delta^2-\delta-1/6)\big)\, P^{(3)}(x,t)$$
$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big\{(n+1)\Delta P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(\delta\frac{R}{N} + \delta\frac{1}{N}(n+1) + 2\delta^2\frac{R}{N} + 2\delta^2\frac{1}{N}(n+1) - \frac{\delta^2}{N^2}R^2 - \delta^2\frac{1}{N^2}(n+1)^2$$
$$-\delta^2\frac{2R}{N^2}(n+1)\Big)$$
$$-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(2\delta^2\frac{R}{N} - 2\delta^2\frac{1}{N}(n-1) - \delta^2\frac{R^2}{N^2} - \delta^2\frac{1}{N^2}(n-1)^2$$
$$+2\delta^2\frac{R}{N^2}(n-1) + \delta\frac{R}{N} - \delta\frac{n-1}{N}\Big)$$
$$+ n\Delta \overset{(3)}{P}(n\Delta,s\tau)\Big(2\delta^2\frac{R}{N^2}n - 2\delta^2\frac{n}{N} - 2\delta\frac{n}{N} + 2\delta^2\frac{R}{N}n - 2\delta^2\frac{n}{N}\Big)\Big\}$$
$$+ D\frac{1}{\Delta^2}\Big\{P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{R^2}{N^2} - \delta^2\frac{1}{N^2}(n+1)^2 - 2\delta^2\frac{R}{N^2}(n+1) + 2\delta^2\frac{R}{N} + 2\delta^2\frac{1}{N}(n+1)$$
$$+\delta\frac{R}{N} + \delta\frac{1}{N}(n+1)\Big)$$
$$-P^{(3)}((n\Delta),s\tau)\Big(-\delta^2\frac{R^2}{N^2} - \delta^2\frac{1}{N^2}n^2 + 2\frac{R}{N^2}n + 2\frac{R}{N}\delta^2 + \delta\frac{R}{N} - \delta^2 - \delta^2\frac{R^2}{N^2}$$
$$-\delta^2\frac{1}{N^2}n^2 + 2\delta^2\frac{R}{N^2}n + 2\delta^2\frac{R}{N} - \delta + \delta R/N - 1/6\Big)$$
$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{1}{N^2}R^2 - \delta^2\frac{1}{N^2}(n-1)^2 + 2\delta^2\frac{R}{N^2}(n-1) + 2\delta^2\frac{R}{N} - 2\delta^2\frac{n-1}{N} + \delta\frac{R}{N} - \delta\frac{n-1}{N}\Big)\Big\}$$

$$= F\Big(+\gamma(\delta^2+\delta+1/6)X\;,\;-2D(\delta^2+\delta+1/6)\Big)\,p^{(3)}(x,t) \quad + \gamma\Big(\delta\tfrac{1}{2}+\delta^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\,p^{(2)}(x,t)\Big) \qquad (5)$$

$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(\delta\frac{1}{N}(n+1)+2\delta^2\frac{1}{N}(n+1)-\delta^2\underbrace{\frac{2R}{N^2}}_{=\frac{2R}{4R^2}=\frac{1}{2R}}(n+1)\Big)$$

$$-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-2\delta^2\frac{1}{N}(n-1)-\delta\frac{1}{N}(n-1)+2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N^2}}_{=\frac{1}{2R}}(n-1)\Big)\Big)$$

$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)\Delta P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{1}{N^2}(n+1)^2\Big)-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{=\frac{1}{4R^2}}(n-1)^2\Big)\Big)$$

$$+\gamma\frac{1}{2\Delta}\Big(+n\Delta P(n\Delta,s\tau)\Big(2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N^2}}_{=\frac{1}{4R}}n-2\delta^2\underbrace{\frac{1}{N}}_{=\frac{1}{2R}}n-2\delta\underbrace{\frac{1}{N}}_{=\frac{1}{2R}}n+2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N}}_{=\frac{1}{2}}n-2\delta^2\underbrace{\frac{n}{N}}_{=\frac{1}{2R}}\Big)\Big)$$

$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{R^2}{N^2}}_{=1/4}+2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}+\delta\frac{R}{N}\Big)$$

$$-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{R^2}{N^2}}_{=1/4}+2\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}\delta^2+\delta\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}-\delta^2\underbrace{\frac{R^2}{N^2}}_{=1/4}+2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}+\delta\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}-\delta^2-\delta-1/6\Big)$$

$$+P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{R^2}{N^2}}_{=1/4}+2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}+\delta\underbrace{\frac{R}{N}}_{=1/2}\Big)\Big)$$

$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N^2}}_{=1/4R}(n+1)+2\delta^2\underbrace{\frac{1}{N}}_{=\frac{1}{2R}}(n+1)+\delta\underbrace{\frac{1}{N}}_{=1/2R}(n+1)\Big)$$

$$-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(2\underbrace{\frac{R}{N^2}}_{=1/4R}n\Big)$$

$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(2\delta^2\underbrace{\frac{R}{N^2}}_{=1/4R}(n-1)-2\delta^2\underbrace{\frac{1}{N}}_{=1/2R}(n-1)-\delta\underbrace{\frac{1}{N}}_{=1/2R}(n-1)\Big)\Big)$$

$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{=1/4R^2}(n+1)^2\Big)-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{=1/4R^2}n^2\Big)$$

$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\underbrace{\frac{1}{N^2}}_{=1/4R^2}(n-1)^2\Big)\Big)$$

$$=F\Big(\gamma(\delta^2+\delta+1/6)x\;,\;-2D(\delta^2+\delta+1/6)\Big)P^{(3)}(x,t)+\gamma\Big(1/2\,\delta+3/4\,\delta^2\Big)\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\,p^{(2)}(x,t)\Big)$$

$$+\gamma\Big(\delta\frac{1}{2R}+2\delta^2\frac{1}{2R}-\delta^2\frac{1}{2R}\Big)\frac{1}{\Delta}\;\underbrace{\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)^2\Delta^2P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)+(n-1)^2\Delta^2P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)}_{=\frac{\partial}{\partial x}(x^3p^{(3)}(x,t))}$$

$$+\gamma\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}\Big)\frac{1}{\Delta^2}\;\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)^3\Delta^3P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-(n-1)^3\Delta^3P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$

$$+\gamma\frac{1}{\Delta}\;\frac{1}{2\Delta}\Big(n^2\Delta^2P(n\Delta,s\tau)\Big(2\frac{\delta^2}{4R}-\cancel{2}\delta^2\frac{1}{\cancel{2}R}-2\delta\frac{1}{2R}+\delta^2-\cancel{2}\delta^2\frac{1}{\cancel{2}R}\Big)\Big)$$

$$+D\Big(-\delta^2\frac{1}{4}+2\delta^2\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta\Big)\underbrace{\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)}_{=\frac{\partial^2}{\partial x^2}p^{(3)}(x,t)}$$

$$+D(+\delta^2+\delta+1/6)\frac{1}{\Delta^2}P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$+D\Big(-2\delta^2\frac{1}{4R}+2\delta^2\frac{1}{2R}+\delta\frac{1}{2R}\Big)2\Delta\frac{1}{\Delta}\;\underbrace{\frac{1}{2\Delta}\Big(\Delta(n+1)P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-(n-1)\Delta P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)}_{=\frac{\partial}{\partial x}(x\,p^{(3)}(x,t))}$$

$$-D\Big(2\frac{1}{4R}\Big)\frac{1}{\Delta^3}\Big(n\Delta P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big)$$

$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}(n^2+1+2n)\Big)-P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}n^2\Big)$$

$$+P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}(n^2+1-2n)\Big)\Big)$$

$$=\frac{\delta^2}{R}-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{R}=\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{R}=\frac{1}{2}\delta^2\gamma\tau\to 0$$

$$=F\Big(\gamma(\delta^2+\delta+1/6)x+\delta^2\underbrace{\frac{1}{4R^2}}_{\delta^2\tau^2}\frac{1}{\Delta^2}x-2D\Big(-2\delta^2\frac{1}{4R}+2\delta^2\frac{1}{2R}+\delta\frac{1}{2R}\Big)x-\gamma(1/2\,\delta+3/4\,\delta^2)x\;;$$

$$-2D(\delta^2+\delta+1/6)+2D\Big(\underbrace{-\frac{1}{4}\delta^2+\delta^2}_{=3/4\,\delta^2}+1/2\,\delta\Big)\Big)\,p^{(3)}(x,t) \qquad =\sigma x\sim\tau\to 0$$

$$+\gamma\delta\Big(\frac{1}{2R}+\delta\frac{1}{2R}\Big)\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)^2\Delta^2P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-(n-1)^2\Delta^2P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$

$$+\gamma\Big(\frac{\delta^2}{R}(1/2-1-1)-\frac{\delta}{R}+\delta^2\Big)\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}n^2\Delta^2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)+D(\delta^2+\delta+1/6)\frac{1}{\Delta^2}P^{(3)}(n\Delta,s\tau) \quad\to\frac{\partial^2}{\partial x^2}p^{(3)}(x,t)$$

$$-D\frac{1}{2R}\frac{1}{\Delta^3}\Big(n\Delta P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\Big)+D\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}\Big)\frac{1}{\Delta^2}\;\frac{1}{\Delta^2}\Big(n^2\Delta^2P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)n^2\Delta^2$$

$$+n^2\Delta^2P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)\Big) \qquad \sim D\tau\to 0$$

$$+D\frac{1}{\Delta^2}\Big(-\delta^2\frac{1}{4R^2}\Big)\frac{1}{\Delta^2}n^2\Delta^2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$=F\Big(\gamma(\delta^2+\delta+1/6-1/2\,\delta-3/4\,\delta^2+1/6)x+\delta^2\frac{1}{4}\gamma^2\frac{1}{2}\underbrace{\frac{2\tau}{\Delta^2}}_{=D}\underbrace{\tau}_{\to 0}\;;\;-2D(\delta^2+\delta-3/4\,\delta^2-1/2\,\delta+1/6)\Big)p^{(3)}(x,t)$$

$$+\gamma\delta\frac{1}{2R}(1+\delta)\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\Big((n+1)^2\Delta^2P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau)-(n-1)^2\Delta^2P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\Big)$$

$$+\gamma\Big(-\frac{\delta^2}{R}\frac{3}{2}-\frac{\delta}{R}+\delta^2\Big)\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}n^2\Delta^2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)+D(\delta^2+\delta+1/6)\frac{1}{\Delta^2}P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$-D\frac{1}{2R}\frac{1}{\Delta^3}n\Delta P^{(3)}(n\Delta,s\tau)-D\delta^2\underbrace{\frac{1}{4R^2}\frac{1}{\Delta^2}\frac{1}{\Delta^2}}_{=\gamma^2\frac{\tau^2}{\Delta^2}\frac{\tau^2}{\Delta^2}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\gamma^2D^2}n^2\Delta^2P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$= F\left(\gamma\left(\tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\right)x\,;\ -2D\left(\tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{6}\right)\right) P^{(3)}(x,t)$$

$$+ \gamma\delta(1+\delta)\frac{1}{2}\gamma\frac{\tau}{\Delta}\ \underbrace{\frac{1}{2\Delta}\left((n+1)^2\Delta^2 P^{(3)}((n+1)\Delta,s\tau) - (n-1)^2\Delta^2 P^{(3)}((n-1)\Delta,s\tau)\right)}_{\longrightarrow\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 P^{(3)}(x,t)\right)}$$

$$= \frac{\Delta}{2}\frac{\tau}{2\Delta^2} = \frac{\Delta}{2} D \to 0$$

$$+ \gamma\delta\left(\delta - \frac{1}{R}\left(1 + \tfrac{3}{2}\delta\right)\right)\frac{1}{\Delta}\ \frac{1}{2\Delta}\ n^2\Delta^2 P^{(3)}(n\Delta,s\tau) \ + D\left(\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{6}\right)\frac{1}{\Delta^2} P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$- D\frac{1}{2R}\frac{1}{\Delta^3}\ n\Delta\ P^{(3)}(n\Delta,s\tau) \ - D\delta^2\frac{1}{4}\gamma^2 D^2\ n^2\Delta^2 P^{(3)}(n\Delta,s\tau)$$

$$= F\left(\gamma/2\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)x\,;\ -D\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)\right) P^{(3)}(x,t)$$

$$= \left(1 + \tfrac{3}{2}\delta\right)\gamma\frac{1}{2}\overbrace{\frac{\tau}{\Delta^2}}^{D}\frac{1}{2}$$

$$+ P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\ n^2\Delta^2\left(-D^3\gamma^2\delta^2\frac{1}{4} \ + \gamma\delta\left(\delta - \tfrac{1}{R}\left(1 + \tfrac{3}{2}\delta\right)\right)\frac{1}{\Delta}\frac{1}{2\Delta}\right)$$

$$+ P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\left(D\left(\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{6}\right)\frac{1}{\Delta^2} - D\frac{1}{2}\gamma\underbrace{\frac{\tau}{\Delta^2}}_{=\frac{1}{2}D}\ \frac{1}{\Delta}\ (n\Delta)\right)$$

$$= F\left(\gamma/2\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)x\,;\ -D\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)\right) P^{(3)}(x,t)$$

$$+ P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\ n^2\Delta^2\left(-\frac{D^3\gamma^2\delta^2}{4} \ + \gamma\delta^2\frac{1}{2\Delta^2} \ + \ \left(1 + \tfrac{3}{2}\delta\right)\frac{\gamma}{4}D\right)$$

$$+ P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\left(D\left(\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{6}\right)1/\Delta^2 \ - D^2\tfrac{1}{4}\gamma\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\ \cancel{D}\ \frac{1}{\Delta}(n\Delta)\right)$$

$$= F\left(\gamma/2\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)x\,;\ -D\left(\tfrac{1}{2}\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{3}\right)\right) P^{(3)}(x,t) \ + x P^{(3)}(x,t)\cdot\frac{\gamma D}{4}\left(1 + \tfrac{3}{2}\delta - D^2\gamma\delta^2\right)$$

$$+ P^{(3)}(n\Delta,s\tau)\left(D\left(\delta^2 + \delta + \tfrac{1}{6}\right)\frac{1}{\Delta^2} \ - \frac{1}{4}D^2\gamma\ \frac{1}{\Delta}(n\Delta)\right)$$

Développements autour de $n=0$ — encore pire

$$\omega(f(n)) = \exp(-1/\tau(f(n))) = 1 - \frac{1}{\tau(f(n))} + \dots$$

$$\frac{1}{\tau(f(n))} = \frac{1}{\tau(f(0))} + \left(-\frac{1}{\tau^2(f(n))}\,\tau(f(n))'\right)\Bigg|_{n=0} \cdot n + \dots \qquad \tau(f(n))' = \tau'(f(n))\cdot f'(n)$$

$$= \frac{1}{\tau(f(0))} - \frac{1}{\tau^2(f(0))}\,\tau'(f(0))\, f'(0)\,.\,n + O(n^2)$$

Exemple :

$\omega(R+(n+1))$: $f(n) = R+n+1$

$$\tau(f) = \tau_0 + \delta\cdot\left(1 - \frac{f(n)}{N}\right) \quad \forall f$$

$$\tau'(f) = -\frac{\delta}{N} \quad \forall f$$

$$\tau^{(k)}(f) = 0 \quad \forall k \geq 1. \quad \forall f$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\tau(f(n))} = \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{f(0)}{N}\right)} - \underbrace{\frac{-\frac{\delta}{N} f'(0)}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{f(0)}{N}\right)\right)^2} \cdot n}_{} + O(n^2)$$

$$= \delta \frac{n}{N} \frac{f'(0)}{(\cdots)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega(f(n)) = 1 - \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{f(0)}{N}\right)} - \delta \frac{n}{N} \frac{f'(0)}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{f(0)}{N}\right)\right)^2} + o(n^2)}$$

Ex :

$N = 2R \rightarrow = \frac{R+1}{2R} = \frac{1}{2}(1 + 1/R) \rightarrow = \sigma\varepsilon \;\}\; \xi$

$$\omega(R+n+1) = 1 - \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R+1}{N}\right)} - \delta \frac{n}{N} \frac{1}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R+1}{N}\right)\right)^2} + \dots$$

$\frac{n}{2} \gg 0 \Longrightarrow \xi$

$$\omega(R-(n-1)) = 1 - \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R-1}{N}\right)} + \delta \frac{n}{N} \frac{1}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R-1}{N}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\omega(R-n) = 1 - \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R}{N}\right)} + \delta \frac{n}{N} \frac{1}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R}{N}\right)\right)^2} + \dots$$

$$\omega(R+n) = 1 - \frac{1}{\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R}{N}\right)} - \delta \frac{n}{N} \frac{1}{\left(\tau_0 + \delta\left(1 - \frac{R}{N}\right)\right)^2} + \dots$$

yes possible

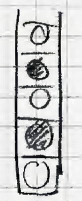
Ordre le $\oplus$ bas $\Longrightarrow$ Ok : Ehrenfest

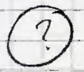
Ordre suivant :

Vérifier les rés. Sauvés avec débits. non garantie.

TWO SPECIES : separation/mixing

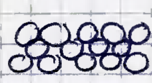
— have to take into account spatial structure of the urn (noone of prev. model repr. separation)
— particles of same radius (simplify) + same mass (simplify) ("species")
— Brazilian nuts : — shouldn't state this by saying that particles with $\alpha_1 < \alpha_2$ (restit. coeff.) are on the top coz would lead to the 1-particle prob. eventually
— should create a model which reproduces the Brazilian nut effect
— model : — for each particle, add a new variable : heigth (→ probability : relative heigth)
— urn





$\updownarrow \delta h$ → fermi-like occupation (1D)

• hyp : balls : 8888 but not



i : same occupation level $\forall i$: c ; $\frac{N}{c} \cdot \delta h \ll h_{slit}$

— particle may jump to other urn only if it is in the last line + ~~...~~ (~~...~~) ⇒ 1D problem !
— take into account collisions + temperatures → redistribution position ; iteration = 1 run particle positions + 1 run particle jump

~~tall particle may jump~~

What has been done for the Brazilian nuts problem. (Hemann) 1D brazilian nuts ... and so on ...

$$p \sim n_{a_i, b_i} e^{-\frac{\Delta h}{T_{\text{ⓒ}urn}}} \quad + \text{constraints}$$

$$\Delta h = h_{slit} - h_{particle} \gg 0$$

$$T_{\text{ⓒ}} = T_0 + \Delta(1 - n_{ai} - n_{bi})$$: same temperature , but :

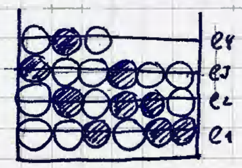
α appears only in the collisional process (very important to describe it correctly...) in order to redistribute the particles positions

⇒ pseudo-random process for particles positions, driven by α :

$\alpha_1 \gtrless \alpha_2 \Rightarrow$ particle 1 ↓

... ~~Diffusion ?~~ ... ~~Fokker-Planck ?~~ (non mean field) ... [~~Asymetric Random walk ?~~ ... $\boxed{+ \text{Monte-Carlo}}$] ← ~~easiest solution~~

— particles position : Monte-Carlo :



1 iteration : · choose 1 ball randomly, say "ball1" $\in e_3$
· choose 1 ball randomly in e_4 (if not empty !) or e_2, say "ball2"
· Monte-Carlo : if random_number <= f(ball1_α, ball2_α) then "ball1" and "ball2" exchange their position

1 time step = N iteration
(a given ball may move more than once in a given time step.)

— model for f ... ? Example : ● $\alpha_1 < \alpha_2$ ○ α_2 :
8 or 8 : f = 0.5 (or f = 0.)
8 : f small : small probability to change
8 : f big : big probability to change

• f Boltzmanian ? $\underbrace{e^{-(\alpha_2-\alpha_1)/T_i}}_{8 \text{ big}}$? and $\underbrace{1 - e^{-(\alpha_2-\alpha_1)/T_i}}_{8 \text{ small}}$?

Why ? if T_i ↑, greater energy → more likely to exchange the positions ...

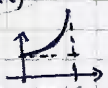
▸ model for f : 8)

$$\begin{cases} \lim_{\alpha_1 \to 0} f(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \\ \lim_{\alpha_1 \to \alpha_2} f(\alpha_1, \alpha_2) = 0.5 \end{cases}$$

: first specie totally inelastic : no kinetic energy transmitted : stays here
: do not distinguish the species anymore

Boltzmann : $f(\alpha_1, \alpha_2) = e^{-1/T_i \, g(\alpha_1, \alpha_2)}$

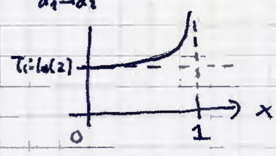
+ hyp : $g(\alpha_1, \alpha_2) = g(\alpha_2 - \alpha_1)$: ∼



: probabilities depends on the difference of restit. coeff. !

$$\begin{cases} \lim_{\alpha_1 \to 0} f(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \Rightarrow \lim_{\alpha_1 \to 0} g(\alpha_1, \alpha_2) = \infty \\ \lim_{\alpha_1 \to \alpha_2} f(\alpha_1, \alpha_2) = 0.5 \Rightarrow \lim_{\alpha_1 \to \alpha_2} g(\alpha_1, \alpha_2) = T_i \cdot \ln(2) \end{cases}$$

∃ other possibilities ! ... from the experience ... theories ... ? ...

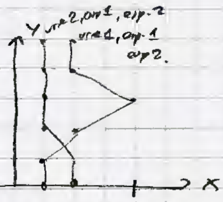


$$\Rightarrow g(x) = \frac{T_i \cdot \ln(2) + x}{1 - x} \quad , x = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\left(-\frac{1}{T_i} \cdot \frac{T_i \ln(2) + (\alpha_2 - \alpha_1)}{1 - (\alpha_2 - \alpha_1)}\right) \in [0, 0.5]$$

8) $f \to 1 - f \quad \in [0.5, 1]$

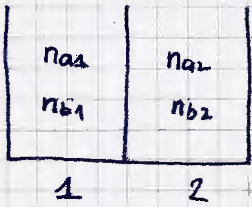
Plot :



x = fraction normalisée à 1 du nombre de balles d'une espèce sur un niveau
Y = hauteur

} urne 1 , exp. 1, 2 ; urne 2 , exp. 1, 2 } 4 fichiers

2 species model:



$$\begin{cases} N_a+N_b = N & , \ N_a=N_b=N/2 \\ n_{a1}+n_{a2}=N_a & \Rightarrow n_{a2}=N_a-n_{a1} = N/2-n_{a1} \\ n_{b1}+n_{b2}=N_b & \Rightarrow n_{b2}=N_b-n_{b1} = N/2-n_{b1}\end{cases}$$

2 independent variables: n_{a1}, n_{b1}. Definition of the temperature:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= T_0 + \Delta\left(1-(n_{a1}+n_{b1})/N\right) \\ T_2 &= T_0 + \Delta\left(1-(n_{a2}+n_{b2})/N\right)\end{aligned}\right]$$

same temperature for both species, with different masses, or... different temperatures for different species, with same masses.. (same cooling down properties)

$$\omega_i[a,b] = \exp\left(-m(a,b)/T_i\right) \quad , \ m(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{if specie } a \\ x & \text{if specie } b\end{cases}$$

Local equilibrium: 2 different laws:

1. $$\left.\begin{aligned} n_{a1}e^{-1/T_1} &= n_{a2}e^{-1/T_2} \\ n_{b1}e^{-x/T_1} &= n_{b2}e^{-x/T_2}\end{aligned}\right]$$ equilibrium of each component: no fluxes: static.

2. $$n_{a1}e^{-1/T_1} + n_{b1}e^{-x/T_1} = n_{a2}e^{-1/T_2} + n_{b2}e^{-x/T_2}$$: equilibrium of the sum of the two species: there might be some fluxes: oscillating solution.

Small parameters: there are two kind of small parameters:

1) $$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &\sim n_{a1}-n_{a2} \\ \varepsilon_2 &\sim n_{b1}-n_{b2}\end{aligned}\right\}$$ asymetry between the urns (similar to the one-specy problem) : $\varepsilon \sim 0$

$\boxed{\text{TEST}}$

~~2) $\varepsilon \sim n_{a1}-n_{b1}$: asymetry between the two species in a given urn. ; $\varepsilon\sim 0$~~

- Expression of the small parameters for 1):

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{n_{a1}-n_{a2}}{N} & \in [-1/2, 1/2] \\ \varepsilon_2 = \dfrac{n_{b1}-n_{b2}}{N} & \in [-1/2, 1/2]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n_{a1} = N\cdot\varepsilon_1 + n_{a2} = N\cdot\varepsilon_1 + N/2 - n_{a1} & \Rightarrow n_{a1} = N/2\,(\varepsilon_1 + 1/2) \in [0, N/2] \\ n_{b1} = \dots = N/2\,(\varepsilon_2+1/2) \in [0,N/2]\end{cases}$$

$$\Rightarrow (n_{a1}+n_{b1})/N = 1/2\,(\varepsilon_1+1/2+\varepsilon_2+1/2) = 1/2\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1) \in [0,1]$$

$$(n_{a2}+n_{b2})/N = 1/N\cdot(N/2-n_{a1}+N/2-n_{b1}) = 1-(n_{a1}+n_{b1})/N = 1-1/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1) = 1/2\,(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2) \in [1,0]$$

Taylor expansion of ω:

$$e^{-m/T_i} = \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta(1-1/2(1+\alpha_i(\varepsilon_1+\varepsilon_2)))}\right) \quad , \ \alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i=1 \\ -1 & \text{if } i=2\end{cases} \ ; \ m = \begin{cases} 1 & \text{if } a \\ x & \text{if } b\end{cases}$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta(1-1/2)}\right) + \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta(1-1/2)}\right)\cdot(-1)\cdot m\cdot\frac{1}{T_i^2}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot(-1)\cdot\nabla_\varepsilon T_i\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} + \dots$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta/2}\right)\cdot\left\{1+\frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot\sum_{j=1}^{2}\hat{e}_j^2\frac{\partial}{\partial\varepsilon_j}\left(T_0+\Delta(1-1/2(1+\alpha_i(\varepsilon_1+\varepsilon_2)))\right)\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon_j\right\}$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta/2}\right)\cdot\left\{1+\frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot\sum_{j=1}^{2}\left(-\frac{\Delta}{2}\right)\alpha_i\frac{\partial}{\partial\varepsilon_j}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\hat{e}_j^2\,\varepsilon_j\right\}$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta/2}\right)\cdot\left\{1-\frac{m\Delta}{2}\frac{1}{(T_0+\Delta/2)^2}\alpha_i(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right\} \quad , \ \alpha_i = (-1)^{i+1} = -(-1)^i$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{T_0+\Delta/2}\right)\left\{1+\frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot(-1)^i\right\} + O(\varepsilon^2)$$

To sum up:

$$\boxed{\begin{aligned} n_{a1} &= N/2\,(\varepsilon_1+1/2) & n_{a2} &= N/2\,(1/2-\varepsilon_1) \\ n_{b1} &= N/2\,(\varepsilon_2+1/2) & n_{b2} &= N/2\,(1/2-\varepsilon_2)\end{aligned}}$$

vor.

- Expression of the small parameters for 2):

$$\varepsilon = \frac{n_{a1}-n_{b1}}{N} \in [-1/2, 1/2]$$; only one small parameter because by analogy $\varepsilon_2 = \frac{n_{a2}-n_{b2}}{N} = -\varepsilon_1$

Temperatures:

$$T_1 = T_0+\Delta\left(1-1/N\,(N\varepsilon+n_{b1}+n_{b1})\right) = T_0+\Delta\left(1-\varepsilon-2n_{b1}/N\right)$$

$$T_2 = T_0+\Delta\left(1-1/N\,(N/2-n_{a1}+N/2-n_{b1})\right) = T_0+\Delta\left(1-1+(n_{a1}+n_{b1})/N\right) = T_0+\Delta\left(\varepsilon+2n_{b1}/N\right)$$

Taylor expansion:

$$e^{-m/T_i} = \exp\left(-m/T_0+\Delta f_i(\varepsilon)\right) = e^{-m/T_0+\Delta f_i(0)}\left\{1-\frac{m\,(-1)}{(T_0+\Delta f_i(0))^2}\cdot\Delta\frac{\partial f_i}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon\right\}$$

$$= e^{-m/T_0+\Delta f_i(0)}\left\{1+\frac{m\Delta}{(T_0+\Delta f_i(0))^2}\cdot\alpha\varepsilon\right\} \quad , \ \alpha = (-1)^i \ , \ f_1(0) = 1-2\frac{n_{b1}}{N} \ ; \ f_2(0) = 2\frac{n_{b1}}{N}$$

$$\begin{aligned} n_{a1} &= N\varepsilon + n_{b1} & n_{a2} &= N/2 - N\varepsilon - n_{b1} \\ n_{b1} &= n_{b1} & n_{b2} &= N/2 - n_{b1}\end{aligned}$$

$\underline{\text{Simplest case:}}$ ①

- $n_{a1} e^{-1/\tau_1} = n_{a2} e^{-1/\tau_2}$: $\frac{N}{2}(\varepsilon_1 + 1/2) \cdot \left(1 + \frac{m\Delta}{2} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2}(-1)\right) = \frac{N}{2}(\varepsilon_1+1/2) \cdot \left(1 + \frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2}(+1)\right)$

$$\Rightarrow \frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \cancel{1/2}) - \frac{N}{2}\underbrace{(\varepsilon_1 + 1/2)}_{O(\varepsilon^2)} \frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = \frac{N}{2}(\cancel{\varepsilon_1} + \cancel{1/2}) + \frac{N}{2}\underbrace{(\cancel{\varepsilon_1}+1/2)}_{O(\varepsilon^2)}\frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2}\varepsilon_1 + \frac{N}{2}\varepsilon_1 - \frac{N}{2}\frac{1}{2}\frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} - \frac{N}{2}\frac{1}{2}\frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon_1 - \frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = 0 \quad , m = 1 \quad \cancel{\Leftrightarrow 1 = \frac{m\Delta}{2}\frac{1}{(\tau_0+\Delta/2)^2} \Rightarrow \tau_0+\Delta/2 = \sqrt{\Delta/2}} \quad \cancel{\boxed{\tau_0(\Delta) = \sqrt{\Delta/2} - \Delta/2}}$$

- $n_{b1} e^{-x/\tau_1} = n_{b2} e^{-x/\tau_2}$: calculs identiques, but

$$2\varepsilon_2 - \frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = 0 \quad , m = x$$

$\underline{\text{To sum up:}}$

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1 - \frac{m\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = 0 \\ 2\varepsilon_2 - \frac{x\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(\tau_0+\Delta/2)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\varepsilon_1 \cdot \frac{2}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$
$$\Rightarrow \varepsilon_2 = \varepsilon_1\left(\frac{4}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 - 1\right)$$

$$\rightarrow 2 \cdot \cancel{\varepsilon_1}\left(\frac{4}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 - 1\right) - \frac{x\Delta}{2}\frac{\cancel{\varepsilon_1}}{(\tau_0+\Delta/2)^2} - \frac{x\Delta}{2}\frac{1}{(\tau_0+\Delta/2)^2}\cdot\cancel{\varepsilon_1}\left(\frac{4}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\left(\frac{4}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 - 1\right)\left(2 - \frac{x\Delta}{2}\frac{1}{(\tau_0+\Delta/2)^2}\right)}$$

$$2 \cdot a - b - b \cdot a = 0 \qquad , a = \frac{4}{\Delta}(\tau_0+\Delta/2)^2 - 1 \; ; \; b = \frac{x\Delta}{2}\frac{1}{(\tau_0+\Delta/2)^2}$$

$$\Rightarrow 2a - b(1+a) = 0$$

$\underline{\text{Solution:}}$

$$\tau_0(\Delta) = \frac{1}{2}\left(-\Delta \pm \sqrt{\Delta(1+x)}\right)$$

Relevant solution: (+) (positive temperature)

$$\boxed{\tau_0(\Delta) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta(1+x)} - \Delta\right)}$$

Good: for $x=1$, one recovers the result of the first article: ✓

$$\tau_0^{x=1}(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{2\Delta} - \Delta/2 = \sqrt{\Delta/2} - \Delta/2 \quad \underline{\underline{: ok!}} \quad ; \tau_0^{x=0} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \Delta/2$$

$\underline{\text{Second simplest case:}}$ 1/2)

- $n_{a1} e^{-1/\tau_1} = n_{a2} e^{-1/\tau_2}$: $(N\varepsilon + n_{b1}) \cdot e^{-m/(\tau_0 + \Delta(1-2n_{b1}/N))\cdot(\dots)} - \left(\frac{N}{2} - N\varepsilon - n_{b1}\right) e^{-m/(\tau_0+\Delta(2n_{b1}/N))} = 0$

$$\Rightarrow (N\varepsilon + n_{b1}) e^{-m/\dots}\left(1 + \frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_1(\varepsilon))^2}\cdot(-1)\right) - \left(\frac{N}{2} - N\varepsilon - n_{b1}\right)e^{-m/\dots}\left(1 + \frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_2(\varepsilon))^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-m/(\tau_0+\Delta f_1)} \cdot \left\{N\varepsilon - n_{b1}\frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_1)^2} + n_{b1}\right\} - e^{-m/\tau_0+\Delta f_2}\left\{-N\varepsilon + \frac{N}{2} - n_{b1} + \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right)\frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_2)^2}\right\} = 0$$

$$O(\varepsilon^0): e^{-m/\tau_0+\Delta f_1} n_{b1} - e^{-m/\tau_0+\Delta f_2}\left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow n_{b1}\left(\exp\left(-\frac{m}{\tau_0+\Delta f_1}\right) + \exp\left(-\frac{m}{\tau_0+\Delta f_2}\right)\right) = \frac{N}{2}\exp\left(-\frac{m}{\tau_0+\Delta f_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n_{b1}}{N} = \frac{1}{2}\frac{\exp(-m/\tau_0+\Delta f_2)}{\exp(-m/\tau_0+\Delta f_1) + \exp\left(-\frac{m}{\tau_0+\Delta f_2}\right)} \qquad , m = 1, \; f_1 = 1 - 2\frac{n_{b1}}{N}, \; f_2 = 2\frac{n_{b1}}{N}$$

Transcendental equation

$$O(\varepsilon^1): e^{-m/\tau_0+\Delta f_1}\left(N - n_{b1}\frac{m\Delta}{(\tau_0+\Delta f_1)^2}\right) - e^{-m/\tau_0+\Delta f_2}\left(-N + \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right)\frac{m\Delta}{(\tau_0+\Delta f_2)^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow N\left(e^{-m/\tau_0+\Delta f_1} + e^{-m/\tau_0+\Delta f_2}\right) + \frac{m\Delta}{(\tau_0+\Delta f)^2}\left(-n_{b1}e^{-m/\tau_0+\Delta f_1} + \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right)e^{-m/\tau_0+\Delta f_2}\right) = 0$$

Transcendental eqn. 6

- $n_{b1} e^{-x/\tau_1} = n_{b2} e^{-x/\tau_2}$: $n_{b1} e^{-x/\tau_0+\Delta f_1}\left(1 + \frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_1)^2}(-1)\right) - \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right)e^{-x/\tau_0+\Delta f_2}\left(1 + \frac{m\Delta\varepsilon}{(\tau_0+\Delta f_2)}\right) = 0$

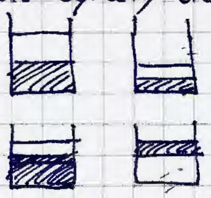
$$O(\varepsilon^0): n_{b1} e^{-x/\tau_0+\Delta f_1} - \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right)e^{-x/\tau_0+\Delta f_2} = 0$$

$$\Rightarrow n_{b1}\left(e^{-x/\tau_0+\Delta f_1} + e^{-x/\tau_0+\Delta f_2}\right) = \frac{N}{2} e^{-x/\tau_0+\Delta f_2}$$: SAME EQUATION but with x

Other definition for the small parameters which describe the two symetry breakings:

part. a part. b in same vm. $\varepsilon_1 = \frac{n_{a1} - n_{b1}}{N} \in [-1/2, 1/2]$

tot. # part. in vm 1, 2. $\varepsilon_2 = \frac{N - 2(n_{a1} + n_{b1})}{2N} \in [-1/2, 1/2]$



$\varepsilon_2 \neq 0$, $\varepsilon_1 = 0$

$\varepsilon_1 \neq 0$, $\varepsilon_2 = 0$

$x = 1$

My first small parameter corresponds to the curve $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. We have:

$$n_{a1} = N \cdot \varepsilon_1 + n_{b1} \qquad (1)$$

and:

$$\varepsilon_2 \cdot 2N = N - 2n_{a1} - 2n_{b1} \Longrightarrow 2N\varepsilon_2 - N + 2n_{a1} = -2n_{b1}$$
$$\Longrightarrow n_{b1} = -N\varepsilon_2 + N/2 - n_{a1} \qquad (2)$$

(2) in (1) $\Rightarrow$

$$n_{a1} = N \cdot \varepsilon_1 - N\varepsilon_2 + N/2 - n_{a1} \Longrightarrow n_{a1} = \frac{N}{2}\varepsilon_1 - \frac{N}{2}\varepsilon_2 + N/4 = \frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{N}{4} \qquad (3)$$

(3) in (2) $\Rightarrow$

$$n_{b1} = -N\varepsilon_2 + N/2 - N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - N/4 = N/4 + \frac{N}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{N}{2} \cdot 2\varepsilon_2 = -\frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{N}{4}$$

Vérification:

$$n_{a1} + n_{b1} = N/2 - N/2\,\varepsilon_2 - N/2\,\varepsilon_2 = N/2 - N\varepsilon_2 = N(1/2 - \varepsilon_2) \in [0, N] \quad : \underline{ok}.$$

Temperatures:

$$(n_{a1} + n_{b1})/N = \frac{1}{N} \cdot N(1/2 - \varepsilon_2) = 1/2 - \varepsilon_2 \in [0, 1]$$

$$(n_{a2} + n_{b2})/N = \frac{1}{N} \cdot (N/2 - n_{a1} + N/2 - n_{b1}) = \frac{1}{N} N - 1/N(n_{a1} + n_{b1}) = 1 - (1/2 - \varepsilon_2) = 1/2 + \varepsilon_2$$

$$\Longrightarrow T_i = T_0 + \Delta(1 - f_i), \quad f_i = 1/2 + (-1)^i \varepsilon_2$$

$$\Longrightarrow T_i = T_0 + \Delta(1 - 1/2 - (-1)^i \varepsilon_2) = T_0 + \Delta(1/2 + (-1)^{i+1}\varepsilon_2) \quad ; T_i(0) = T_0 + \Delta/2$$

Taylor expansion:

$$e^{-m/T_i} = e^{-m/T_i(0)} \left\{ 1 - m \frac{1}{T_i(0)^2} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_K} T_i \Big|_{\varepsilon=0}}_{= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_K} \Delta(-1)^{i+1}\varepsilon_2 = \Delta \cdot (-1)^{i+1}} \cdot \varepsilon_K \right\} \quad \text{, in direction } k$$

$$= e^{-m/T(0)} \left\{ 1 + \frac{m}{T_0^2} \Delta(-1)^{i+1} \varepsilon_2 \right\} \qquad \text{~~∀ direction 1, 2 or 1+2~~} !!$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-m/T_i} = e^{-m/T_0 + \Delta/2} \left\{ 1 + \frac{m\Delta(-1)^{i+1}}{(T_0 + \Delta/2)^2} \varepsilon_2 \right\}} \Longleftrightarrow k = 2 \text{ or } k=1, k=2 \text{ ; if } k = 1 \text{ then: } e^{-m/T_i} = e^{-m/T_0 + \Delta/2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} n_{a1} = N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + N/4, & n_{a2} = N/2 - N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - N/4 = N/2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + N/4 \\ n_{b1} = -N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + N/4, & n_{b2} = N/2 + N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - N/4 = N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + N/4 \end{array}}$$

Simplest case: 1

$$k = 1: \varepsilon_1 = 0: \quad (N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cancel{N/4}) - N/2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \cancel{N/4} = 0 \Longrightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$$
$$-N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \cancel{N/4} - N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \cancel{N/4} = 0 \Longrightarrow \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$$

m/4 for $T_0 = 0$

$\Rightarrow \nexists$ case where $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ $\Longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$ and $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \Longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ...

$$k = 2: \varepsilon_2 = 0: \quad (N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + N/4) \cdot \left(1 + \frac{\Delta(-1)^2}{(T_0 + \Delta/2)^2} \varepsilon_2\right) - \left(\frac{N}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + N/4\right)\left(1 - \frac{\Delta}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2\right) = 0$$

$\exists$ case where $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$ ... but ... $a_1 + b_1 \stackrel{?}{=} a_2 + b_2$? NO!

$$\Longrightarrow \frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cancel{\frac{N}{4}} + \frac{N}{4}\frac{\Delta}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2 - \frac{N}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \cancel{\frac{N}{4}} + \frac{N}{4}\frac{\Delta}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1) + \frac{N}{2}\frac{\Delta}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$$

$$\Longrightarrow (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}\frac{\Delta}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0 \qquad (1)$$

and:

$$(-N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + N/4)\left(1 + \frac{\Delta x}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2\right) - \left(\frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{N}{4}\right)\left(1 - \frac{\Delta x}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow -\frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \cancel{\frac{N}{4}} + \frac{N}{4}\frac{\Delta x}{(T_0 + \frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2 - \frac{N}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \cancel{\frac{N}{4}} + \frac{N}{4}\frac{\Delta x}{(T_0 + \Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta x}{(T_0 + \frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2 = 0 \qquad (2)$$

$$(1): a - b = \alpha b \quad (2): -a - b = \alpha b \Longrightarrow a = -b - \alpha b = -b(1 + \alpha)$$
$$\Longrightarrow -b(1 + \alpha) - b = \alpha b \Longrightarrow -(1 + \alpha) - 1 = \alpha \Longrightarrow \alpha = -2 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 1$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{\Delta \cdot x}{(T_0 + \Delta/2)^2} = -1 \Longrightarrow (T_0 + \Delta/2)^2 = -\frac{1}{2}\Delta x \Longrightarrow T_0 = \sqrt{-\frac{\Delta \cdot x}{2}} - \Delta/2$$

Verification of ③

(1) $\varepsilon_1 = \dfrac{n_{a1}-n_{b1}}{N}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{N-2(n_{a1}+n_{b1})}{2N}$ (2)

(1) $\Rightarrow$ $n_{a1} = N\varepsilon_1 + n_{b1}$

(2) $\Rightarrow$ $2N\varepsilon_2 - N = -2n_{a1} - 2n_{b1} \Rightarrow -2N\varepsilon_2 + N = 2n_{a1} + 2n_{b1}$

$\Rightarrow n_{b1} = -N\varepsilon_2 + N/2 - n_{a1}$ (3)

(3) in (1) $\Rightarrow$ $n_{a1} = N\varepsilon_1 - N\varepsilon_2 + N/2 - n_{a1} \Rightarrow n_{a1} = N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + N/4$ (4) ✓

(4) in (3) $\Rightarrow$ $n_{b1} = -N\varepsilon_2 + N/2 - N/2\,\varepsilon_1 + N/2\,\varepsilon_2 - N/4 = N/4 + N/2(-\varepsilon_1-\varepsilon_2) = -N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + N/4$ (5) ✓

Temperatures:

$(n_{a1}+n_{b1})/N = \frac{1}{2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 1/4 - \frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 1/4 = 1/2 + 1/2(\cancel{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 - \cancel{\varepsilon_1} - \varepsilon_2) = 1/2(1-2\varepsilon_2) = \frac{1}{2} - \varepsilon_2$ ✓

$(n_{a2}+n_{b2})/N = (N/2 - n_{a1} + N/2 - n_{b1})/N = 1 - (n_{a1}+n_{b1})/N = 1 - 1/2 + \varepsilon_2 = 1/2 + \varepsilon_2$ ✓

$\Rightarrow T_i = T_0 + \Delta\cdot(1 - (1/2 + (-1)^i\varepsilon_2)) = T_0 + \Delta(1 - 1/2 - (-1)^i\varepsilon_2) = T_0 + \Delta(1/2 + (-1)^{i+1}\varepsilon_2)$ ✓

Taylor expansion:

$$e^{-m/T_i} = e^{-m/T_i}\Big|_{\varepsilon_k=0} \cdot \left(1 - \frac{m(-1)}{T_i^2}\Big|_{\varepsilon_k=0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon_k} T_i \Big|_{\varepsilon_k=0} \cdot \varepsilon_k\right)$$

Different cases:

$$\begin{cases} \varepsilon_1=0 : k=1 : & e^{-m/T_i} = e^{-m/T_i}\cdot\left(1 + \frac{m}{T_i^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\overset{=0}{\cancel{T_i(\varepsilon_2)}}\Big|_{\varepsilon_1=0}\cdot\varepsilon_1\right) = e^{-m/T_i} \quad \text{: no change} \\ \varepsilon_2=0 : k=2 : & e^{-m/T_i} = e^{-m/T_0+\Delta/2}\cdot\left(1 + \frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot\Delta\cdot(-1)^{i+1}\cdot\varepsilon_2\right) = e^{-m/T_0+\Delta/2}\left\{1 + (-1)^{i+1}\frac{m\Delta}{(T_0+\frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2\right\} \\ \varepsilon_1=0, \varepsilon_2=0 : & e^{-m/T_i} = e^{-m/T_0+\Delta/2}\cdot\left(1 + \frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot(0\cdot\varepsilon_1 + \Delta(-1)^{i+1}\varepsilon_2)\right) = e^{-m/T_0+\frac{\Delta}{2}}\left\{1 + (-1)^{i+1}\frac{m\Delta}{(T_0+\frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2\right\} \end{cases} =$$

With:

$$\begin{cases} n_{a1} = N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + N/4 & n_{a2} = N/2 - N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) - N/4 = -N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + N/4 \\ n_{b1} = -N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + N/4 & n_{b2} = N/2 + N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - N/4 = N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + N/4 \end{cases}$$

: ok. Checked twice.

- Simplest case: ①

$\varepsilon_1=0$: $n_{a1}e^{-1/T_1} = n_{a2}e^{-1/T_2} \Rightarrow (N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+N/4)\cancel{e^{-m/T_i}} - (N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+N/4)\cancel{e^{-m/T_i}} = 0$, $m=1$

$\Rightarrow N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \cancel{N/4} + N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) - \cancel{N/4} = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$n_{b1}e^{-x/T_1} = n_{b2}e^{-x/T_2} \Rightarrow (-N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \cancel{N/4})\cancel{e^{-m/T_i}} - (N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \cancel{N/4})\cancel{e^{-m/T_i}} = 0$

$\Rightarrow -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

Conclusion: $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0}$, i.e. $\nexists$ $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0$ ✓

$\varepsilon_2=0$: $n_{a1}e^{-1/T_1} = n_{a2}e^{-1/T_2} \Rightarrow (N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+N/4)\cancel{e^{-1/T_0+\Delta/2}}\cdot\left\{1 + \frac{\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2\right\} - (-N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\frac{N}{4})\cancel{e^{-\frac{1}{T_0+\Delta/2}}}\left\{1 - \frac{\Delta}{(T_0+\frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2\right\} = 0$

(same as $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$)

$\Rightarrow N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + \cancel{N/4} + N/4\frac{\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 + N/2(\varepsilon_1-\varepsilon_2) - \cancel{N/4} + N/4\frac{\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$

$\Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$ (5)

$n_{b1}e^{-x/T_1} = n_{b2}e^{-x/T_2} \Rightarrow (-N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+N/4)\cancel{e^{-m/T_0+\Delta/2}}\left\{1 + \frac{m\Delta}{(T_0+\frac{\Delta}{2})^2}\varepsilon_2\right\} - (N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+N/4)\cancel{e^{-\frac{m}{T_0+\Delta/2}}}\left\{1 - \frac{m\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2\right\} = 0$

$\Rightarrow -N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \cancel{N/4} + N/4\frac{m\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 - N/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \cancel{N/4} + N/4\frac{m\Delta}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$

$\Rightarrow -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0$ (6)

(5)+(6) $\Rightarrow$ $\cancel{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 - \cancel{\varepsilon_1} - \varepsilon_2 + \frac{\Delta m}{(T_0+\Delta/2)^2}\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta m}{(T_0+\Delta/2)^2} = 2 \Rightarrow (T_0+\frac{\Delta}{2})^2 = \frac{\Delta m}{2} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{\Delta m}{2}} - \Delta/2$

$$\boxed{T_0(\Delta) = \sqrt{m\Delta/2} - \Delta/2}$$ ✓

$\downarrow$ not physical

Verification of 1 - 2

$$(1)\quad \varepsilon_1 = \frac{n_{a1}-n_{a2}}{N} \;;\quad \varepsilon_2 = \frac{n_{b1}-n_{b2}}{N} \quad (2) \qquad ;\; n_{a2} = N/2 - n_{a1} \;;\; n_{b2} = N/2 - n_{b1}$$

$$(1) \Rightarrow \quad n_{a1} = N\varepsilon_1 + n_{a2} = N\varepsilon_1 + N/2 - n_{a1} \Rightarrow \quad n_{a1} = N/2\, \varepsilon_1 + N/4$$

$$(2) \Rightarrow \quad n_{b1} = N\varepsilon_2 + n_{b2} = n_{b1} + N\varepsilon_2 + N/2 - n_{b1} \Rightarrow n_{b1} = N/2\, \varepsilon_2 + N/4$$

Temperatures:

$$(n_{a1}+n_{b1})/N = 1/\cancel{N}\left(\cancel{N}/2\, \varepsilon_1 + \cancel{N}/4 + \cancel{N}/2\, \varepsilon_2 + \cancel{N}/4 \right) = \cancel{N}/2 + \cancel{N}/2\,(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = N/2\,(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

$$(n_{a2}+n_{b2})/N = 1/N\left(N/2 - n_{a1} + N/2 - n_{b1} \right) = 1 - 1/N(n_{a1}+n_{b1}) = 1 - 1/2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1/2\,(1-\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

$$T_i = T_0 + \Delta\left(1 - 1/2\left(1 + (-1)^{i+1}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right)\right) = T_0 + \Delta\left(1 - 1/2 - 1/2\,(-1)^{i+1}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right) = T_0 + \Delta\left(1/2 + 1/2\,(-1)^{i}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right)$$

$$\Rightarrow T_i = T_0 + \frac{\Delta}{2}\left(1 + (-1)^i(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\right)$$

Taylor expansion:

$$e^{-m/T_i} = e^{-m/T_0+\Delta/2} \cdot \left\{ 1 - \frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2}\cdot(-1) \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} T_i \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon_k \right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$= e^{-m/T_0+\Delta/2} \cdot \left\{ 1 + \frac{m}{(T_0+\Delta/2)^2} \cdot \frac{\Delta}{2}(-1)^i \cdot (\varepsilon_1+\varepsilon_2) \right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$= e^{-m/T_0+\Delta/2}\left\{ 1 + (-1)^i \frac{\Delta m}{2} \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} \right\} \qquad : \text{(V) ok}$$

With:
$$\begin{cases} n_{a1} = N/2\, \varepsilon_1 + N/4 \;; & n_{a2} = N/2 - N/2\, \varepsilon_1 - N/4 = -N/2\, \varepsilon_1 + N/4 \\ n_{b1} = N/2\, \varepsilon_2 + N/4 \;; & n_{b2} = N/2 - N/2\, \varepsilon_2 - N/4 = -N/2\, \varepsilon_2 + N/4 \end{cases}$$

(V) ok.

- Simplest case: 1

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=0: \quad n_{a1} e^{-1/T_1} = n_{a2} e^{-1/T_2} \Rightarrow (N/2\,\varepsilon_1 + N/4)\,\cancel{e^{-1/T_0+\Delta/2}}\left\{1 + (-1)\frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}\right\} - \left(-\frac{N}{2}\varepsilon_1 + N/4\right)\cancel{e^{-1/T_0+\Delta/2}}\left\{1 + \frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{N}/2\,\varepsilon_1 + \cancel{N/4} - N/4\,\frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} + N/2\,\varepsilon_1 - \cancel{N/4} - N/4\,\frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 - \frac{\Delta}{4}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} = 0 \qquad (3)$$

$$n_{b1} e^{-m/T_1} = n_{b2} e^{-m/T_2} \Rightarrow (N/2\,\varepsilon_2 + N/4)\,\cancel{e^{-m/T_0+\Delta/2}}\left\{1 - \frac{\Delta m}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}\right\} - (-N/2\,\varepsilon_2 + N/4)\,\cancel{e^{-1/T_0+\Delta/2}}\left\{1 + \frac{\Delta m}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow N/2\,\varepsilon_2 + \cancel{N/4} - N/4\,\frac{\Delta m}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} + N/2\,\varepsilon_2 - \cancel{N/4} - N/4\,\frac{\Delta m}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 - \frac{\Delta m}{4}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2} = 0 \qquad (4)$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \quad \varepsilon_1+\varepsilon_2 - \frac{\Delta}{4}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{(T_0+\Delta/2)^2}(m+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{\Delta}{4}\frac{m+1}{(T_0+\Delta/2)^2} \Rightarrow (T_0+\Delta/2)^2 = \frac{\Delta}{4}(m+1) \Rightarrow T_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta(m+1)} - \Delta/2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0(\Delta) = 1/2\left(\sqrt{\Delta(1+x)} - \Delta\right)}$$

Implementation of the differential equations

1) $\frac{d}{dt} n_{a1} = n_{a2}\, e^{-1/\tau_2} - n_{a1}\, e^{-1/\tau_1} = \left(\frac{N}{2} - n_{a1}\right) e^{-1/\tau_2} - n_{a1}\, e^{-1/\tau_1}$

With: $\tau_1 = \tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{n_{a1}+n_{b1}}{N}\right)$

$$\tau_2 = \tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{n_{a2}+n_{b2}}{N}\right) = \tau_0 + \Delta\left(1 - 1/N\left(N/2 - n_{a1} + N/2 - n_{b1}\right)\right)$$
$$= \tau_0 + \Delta\left(\cancel{1} - \cancel{1/N \cdot N} + \frac{n_{a1}+n_{b1}}{N}\right)$$

With $n_i := n_i/N$: $\cdot 1/N$:

$$\frac{d}{dt} n_{a1} = \left(1/2 - n_{a1}\right) e^{-1/\tau_2} - n_{a1}\, e^{-1/\tau_1} \quad ; \quad \tau_1 = \tau_0 + \Delta(1 - n_{a1} - n_{b1}), \quad \tau_2 = \tau_0 + \Delta(n_{a1} + n_{b1})$$

2) $\frac{d}{dt} n_{b1} = n_{b2}\, e^{-x/\tau_2} - n_{b1}\, e^{-x/\tau_1} = \left(\frac{N}{2} - n_{b1}\right) e^{-x/\tau_2} - n_{b1}\, e^{-x/\tau_1}$

Let: $\begin{cases} X = n_{a1} \\ Y = n_{b1} \end{cases} \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \left(\frac{1}{2} - \overset{Y(1)}{X(t)}\right) \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \Delta(\overset{Y(1)}{X(t)} + \overset{Y(2)}{Y(t)})}\right) - \overset{Y(1)}{X(t)} \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \Delta(1 - \overset{Y(1)}{X(t)} - \overset{Y(2)}{Y(t)})}\right) \\ \frac{d}{dt} Y(t) = \left(\frac{1}{2} - \underset{Y(2)}{Y(t)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau_0 + \Delta(\underset{Y(1)}{X(t)} + \underset{Y(2)}{Y(t)})}\right) - \underset{Y(2)}{Y(t)} \cdot \exp\left(-\frac{m}{\tau_0 + \Delta(1 - \underset{Y(1)}{X(t)} - \underset{Y(2)}{Y(t)})}\right) \end{cases}$$

Second model with $\tau(n) = \tau_0 + \Delta(1 - n_a - x n_b)$:

$$\tau_1 = \tau_0 + \Delta(1 - n_{a1} - x n_{b1})$$
$$\tau_2 = \tau_0 + \Delta(1 - n_{a2} - x n_{b2}) = \tau_0 + \Delta \cdot \left(1 - (1/2 - n_{a1}) - x \cdot (1/2 - n_{b1})\right)$$
$$= \tau_0 + \Delta \cdot (1/2 + n_{a1} - 1/2\, x + n_{b1})$$
$$= \tau_0 + \Delta \cdot (1/2(1-x) + n_{a1} + n_{b1})$$

$x = 1$ for "a" particles
$x \neq 1$ for "b" particles, $x < 1$

Quadratic flux model

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} n_{a1} = (\underset{=1/2 - n_{a1}}{n_{a2}} + \underset{=1/2 - n_{b1}}{n_{b2}})^2 e^{-B_a n_{a2}^2 - B_b n_{b2}^2 - 2B_{ab} n_{a2} n_{b2}} - (n_{a1} + n_{b1})^2 e^{-B_a n_{a1}^2 - B_b n_{b1}^2 - 2B_{ab} n_{a1} n_{b1}} \\ \frac{d}{dt} n_{b1} = (\underset{=1/2 - n_{a1}}{n_{a2}} + \underset{=1/2 - n_{b1}}{n_{b2}})^2 e^{-B_a n_{a2}^2 - B_b n_{b2}^2 - 2B_{ab} n_{a2} n_{b2}} - (n_{a1} + n_{b1})^2 e^{-B_a n_{a1}^2 - B_b n_{b1}^2 - 2B_{ab} n_{a1} n_{b1}} \end{cases}$$

→ same equations!

n_{a1}	n_{a2}
n_{b1}	n_{b2}

$n_{a1} + n_{a2} = N/2 \Rightarrow n_{a2} = \frac{N}{2} - n_{a1}$
$n_{b1} + n_{b2} = N/2 \Rightarrow n_{b2} = \frac{N}{2} - n_{b1}$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} Y(1) = \left(1 - Y(1) - Y(2)\right)^2 e^{-B_a(1/2 - Y(1))^2 - B_b(1/2 - Y(2))^2 - 2B_{ab}(1/2 - Y(1))(1/2 - Y(2))} - \left(Y(1) + Y(2)\right)^2 e^{-B_a Y(1)^2 - B_b Y(2)^2 - 2B_{ab} Y(1) Y(2)}$$

$$\frac{d}{dt} Y(2) = \left(1 - Y(1) - Y(2)\right)^2 \ldots \text{idem.} - \left(Y(1) + Y(2)\right)^2 \ldots \text{idem.}$$

3 urn 2 species

$$\frac{d}{dt} n_{\underset{b}{a1}} = \frac{1}{2} n_{\underset{b}{a2}}\, e^{-x/\tau_2} + \frac{1}{2} n_{\underset{b}{a3}}\, e^{-x/\tau_3} - n_{\underset{b}{a1}}\, e^{-x/\tau_1}$$

$$\frac{d}{dt} n_{\underset{b}{a2}} = \frac{1}{2} n_{\underset{b}{a1}}\, e^{-x/\tau_1} + \frac{1}{2} n_{\underset{b}{a3}}\, e^{-x/\tau_3} - n_{\underset{b}{a2}}\, e^{-x/\tau_2}$$

$n_{a1} + n_{a2} + n_{a3} = N/2$

$n_{b1} + n_{b2} + n_{b3} = N/2$

$\Rightarrow$ 4 variables indep.:

$$\begin{cases} n_{a3} = N/2 - n_{a1} - n_{a2} \\ n_{b3} = N/2 - n_{b1} - n_{b2} \end{cases}$$

With:

$$\tau_1 = \tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{\overset{Y(1)}{n_{a1}} + \overset{Y(2)}{n_{b1}}}{N}\right)$$

$$\tau_2 = \tau_0 + \Delta\left(1 - (\underbrace{n_{a2} + n_{b2}}_{Y(3)\ Y(4)})/N\right)$$

$$\tau_3 = \tau_0 + \Delta\left(1 - 1/N\left(N/2 - n_{a1} - n_{a2} + N/2 - n_{b1} - n_{b2}\right)\right)$$

$$= \tau_0 + \Delta\left(\cancel{1} - \cancel{1} + (n_{a1} + n_{a2} + n_{b1} + n_{b2})/N\right)$$

Eqns:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overset{Y(1)}{n_{a1}} = \frac{1}{2} \overset{Y(3)}{n_{a2}}\, e^{-1/\tau_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - \overset{Y(1)}{n_{a1}} - \overset{Y(3)}{n_{a2}}\right) e^{-1/\tau_3} - \overset{Y(1)}{n_{a1}}\, e^{-1/\tau_1} & : Y(1) \\ \frac{d}{dt} \overset{Y(2)}{n_{b1}} = \frac{1}{2} \underset{Y(4)}{n_{b2}}\, e^{-x/\tau_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - \underset{Y(2)}{n_{b1}} - \underset{Y(4)}{n_{b2}}\right) e^{-x/\tau_3} - \underset{Y(2)}{n_{b1}}\, e^{-x/\tau_1} & : Y(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \underset{Y(3)}{n_{a2}} = \frac{1}{2} \underset{Y(1)}{n_{a1}}\, e^{-1/\tau_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - \underset{Y(1)}{n_{a1}} - \underset{Y(3)}{n_{a2}}\right) e^{-1/\tau_3} - \underset{Y(3)}{n_{a2}}\, e^{-1/\tau_2} & : Y(3) \\ \frac{d}{dt} \underset{Y(4)}{n_{b2}} = \frac{1}{2} \underset{Y(2)}{n_{b1}}\, e^{-x/\tau_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{N}{2} - \underset{Y(2)}{n_{b1}} - \underset{Y(4)}{n_{b2}}\right) e^{-x/\tau_3} - \underset{Y(4)}{n_{b2}}\, e^{-x/\tau_2} & : Y(4) \end{cases}$$

$n_{ij} \to n_{ij}/N$.

$$\underset{Y(1)}{n_{a1}} \qquad \underset{Y(3)}{n_{a2}} \qquad \underset{Y(2)}{n_{b1}} \qquad \underset{Y(4)}{n_{b2}}$$

2 species, model B

(1) $\boxed{\varepsilon_1 = \frac{n_{a1}-n_{a2}}{N}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n_{b1}-n_{b2}}{N}}$. $\quad \begin{cases} n_{a1} = N/2\,(\varepsilon_1 + 1/2) \\ n_{b1} = N/2\,(\varepsilon_2 + 1/2) \end{cases}$

$$\frac{n_{a1}+x n_{b1}}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2}\varepsilon_1 + \frac{N}{2}\frac{1}{2} + x\frac{N}{2}\varepsilon_2 + x\frac{N}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1+x)\right)$$

$$\frac{n_{b1}+x n_{b2}}{N} = \frac{1}{N}\left(N/2 - n_{a1} + x N/2 - x n_{b1}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2} + x\frac{N}{2}\right) - \frac{1}{N}(n_{a1}+x n_{b1}) = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2 + 1/2(1+x)\right)$$
$$= 1/2\left(1/2(1+x) - \varepsilon_1 - x\varepsilon_2\right)$$

Taylor: $$e^{-1/\tau_i} = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x)}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{(\tau_0 + \Delta/4(1+x))^2}\cdot\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_j}\tau_i\Big|_{\varepsilon=0}\varepsilon_j\right) + o(\varepsilon^2)$$

$$\tau_i = \Delta\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(1+x) + (-1)^{i+1}(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2)\right)\right) + \tau_0$$

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_j}\tau_i\varepsilon_j = -\Delta\frac{1}{2}(-1)^{i+1}\left(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2\right)$$

$$\Rightarrow e^{-1/\tau_i} = \exp\left(-\frac{1}{\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x)}\right)\left(1 + \frac{\Delta}{2}\frac{(-1)^i(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2)}{(\tau_0 + \Delta/4(1+x))^2}\right)$$

i) $n_{a1}e^{-1/\tau_1} = n_{a2}e^{-1/\tau_2} \Rightarrow$
$$\frac{N}{2}(\varepsilon_1 + 1/2)\left(1 + \underbrace{(-1)^i}_{-1}\frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \Delta/4(1+x))^2}\right) - \left(\frac{N}{2} - \frac{N}{2}(\varepsilon_1 + 1/2)\right)\left(1 + \frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x))^2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \Delta/4(1+x))^2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(1 + \frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x))^2}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{\Delta}{8}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \Delta/4(1+x))^2} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\Delta}{8}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x))^2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \varepsilon_1 - \Delta/4\,(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2)/(\tau_0 + \tfrac{\Delta}{4}(1+x))^2 = 0\ ; x=1 \text{ here} \quad : \varepsilon_1 - \frac{\Delta}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cdot\frac{1}{(\tau_0+\Delta)^2} = 0$$

ii) $n_{b1}e^{-1/\tau_1} = n_{b2}e^{-1/\tau_2} \Rightarrow \varepsilon_2 - \Delta/4\,(\varepsilon_1 + x\varepsilon_2)/(\dots)^2 = 0$

i) − ii) $\Rightarrow$ $0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

i) + ii) $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{\Delta}{2}\frac{\varepsilon_1 + x\varepsilon_2}{(\dots)^2} = 0$

i) $\Rightarrow$ $\varepsilon_1 - \frac{\Delta}{4}\varepsilon_1\frac{1}{(\dots)^2} = \frac{\Delta}{4}x\varepsilon_2\frac{1}{(\dots)^2} \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\Delta}{4}\frac{x\varepsilon_2}{(\dots)^2}\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta}{4}\frac{1}{(\dots)^2}\right)}$

in ii) $\Rightarrow$
$$\varepsilon_2 - \frac{\Delta}{4}\frac{1}{(\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x))^2}\left(x\varepsilon_2 + \frac{\Delta x\varepsilon_2}{4}\frac{1}{\left(1 - \Delta/4\frac{1}{(\dots)^2}\right)}\right) = 0$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{\Delta}{4}\frac{1\cdot x}{(\tau_0 + \frac{\Delta}{4}(1+x))^2}\left(1 + \frac{\Delta}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta}{4}\frac{1}{(\dots)^2}\right)}\right) = 0$$

Sol. $\forall\Delta$: $\nexists$

(2) $\boxed{\varepsilon_1 = \frac{n_{a1}-n_{b1}}{N}, \quad \varepsilon_2 = \frac{N - 2(n_{a1}+n_{b1})}{2N}}$; $\varepsilon_1 \sim 0$. $\quad \begin{matrix} n_{a1} = N/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + N/4 \\ n_{b1} = -N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + N/4 \end{matrix}$

$$\frac{n_{a1}+x n_{b1}}{N} = \frac{1}{N}\left(\frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + N/4 - x N/2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + x N/4\right) = \frac{1}{4}(1+x) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{2}x(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$
$$= \frac{1}{4}(1+x) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1(1-x)\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_2(1+x)$$

$$\frac{n_{a2}+n_{b2}\cdot x}{N} = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{4}(1+x) - \frac{1}{2}\varepsilon_1(1-x) + \frac{1}{2}\varepsilon_2(1+x)$$
$$= \frac{1}{4}(1+x) - \frac{1}{2}\varepsilon_1(1-x) + \frac{1}{2}\varepsilon_2(1+x)$$

$$\tau_i = \tau_0 + \Delta\left(1 - \frac{1}{4}(1+x) + \frac{(-1)^i}{2}\left(\varepsilon_1(1-x) - \varepsilon_2(1+x)\right)\right)$$

$$e^{-1/\tau_i} = \exp\left(-1/\tau_0 + \Delta(1 - 1/4(1+x) + \tfrac{(-1)^i}{2}(-1)\varepsilon_2(1+x))\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{\tau_i(0)^2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\tau_i\Big|_{\varepsilon_1=0}\cdot\varepsilon_1\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{\tau_i(0)}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{\tau_i(0)^2}\Delta\frac{(-1)^i}{2}(1-x)\varepsilon_1\right) + o(\varepsilon^2)$$

i) $$\left(\frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{N}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{\tau_1(0)^2}\Delta\frac{-1}{2}(1-x)\varepsilon_1\right) - \left(\frac{N}{2} - \frac{N}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{N}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{\tau_2(0)^2}\Delta\frac{1}{2}(1-x)\varepsilon_1\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\frac{1}{\tau_1(0)^2}\left(-\frac{\Delta}{2}\right)(1-x)\varepsilon_1 - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\frac{1}{\tau_2(0)^2}\frac{\Delta}{2}(1-x)\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + - \frac{\Delta}{4}(1-x)\varepsilon_1\left(\frac{1}{\tau_1(0)^2} + \frac{1}{\tau_2(0)^2}\right) = 0$$

$$\tau_1(0) = \tau_0 + \Delta\left(1 - 1/4(1+x) + 1/2\,\varepsilon_2(1+x)\right) = \tau_0 + \Delta\left(1 + (1+x)/2\cdot(\varepsilon_2 - 1/2)\right) \quad , x=1$$
$$\tau_2(0) = \tau_0 + \Delta\left(1 - 1/4(1+x) - 1/2\,\varepsilon_2(1+x)\right) = \tau_0 + \Delta\left(1 - (1+x)/2\,(\varepsilon_2 - 1/2)\right) \quad , x=1$$

if $x \neq 1$, ... ~~es~~ ... or, done with computer simulations.

Quadratic model : steady-state curve

$$\varepsilon_1 = \frac{n_{a1}-n_{a2}}{N} \; ; \; \varepsilon_2 = \frac{n_{b1}-n_{b2}}{N} \qquad \left.\begin{aligned} n_{a1} &= N/2\,(\varepsilon_1 + 1/2) \; ; \; n_{a2} = N/2 - n_{a1} = N/2\,(1/2 - \varepsilon_1) \\ n_{b1} &= N/2\,(\varepsilon_2 + 1/2) \; ; \; n_{b1} = N/2 - n_{b1} = N/2\,(1/2 - \varepsilon_2) \end{aligned}\right\} N = 1 \text{ (normalisation)}$$

$$n_{a2}+n_{b2} = N/2(1/2-\varepsilon_1) + N/2(1/2-\varepsilon_2) = 1/4 - \varepsilon/2 + 1/4 - \varepsilon_2/2 = 1/2 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

- $(n_{a2}+n_{b2})^2 = 1/4 - \varepsilon_1/2 - \varepsilon_2/2 + O(\varepsilon^2)$

  $n_{a1}+n_{b1} = 1/2 + 1/2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$
- $(n_{a1}+n_{b1})^2 = 1/4 + \varepsilon_1/2 + \varepsilon_2/2 + O(\varepsilon^2)$
- $n_{a1}^2 = (\varepsilon_1/2 + 1/4)^2 = 1/16 + 1/4\,\varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$
- $n_{a2}^2 = (1/4 - \varepsilon_1/2)^2 = 1/16 - 1/4\,\varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$
- $n_{b1}^2 = 1/16 + 1/4\,\varepsilon_2 + O(\varepsilon^2)$
- $n_{b2}^2 = 1/16 - 1/4\,\varepsilon_2 + O(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow$ The equations thus become: (local equilibrium)

▶ $F_a^{1\to2} = F_a^{2\to1}$: $(n_{a2}+n_{b2})^2 \exp(-B_a n_{a2}^2 - B_b n_{b2}^2 - 2B_{ab} n_{a2} n_{b2}) = (n_{a1}+n_{b1})^2 \exp(-B_a n_{a1}^2 - B_b n_{b1}^2 - 2B_{ab} n_{a1} n_{b1})$

$F_b^{1\to2} = F_b^{2\to1}$: same equation because this n^2 flux model doesn't distinguish "a" and "b" particles!

$\Rightarrow$

$$\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\varepsilon_1}{2} - \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\cdot \exp\left(-B_a\left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right) - B_b\left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right) - 2B_{ab}\left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right)\left(\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right)\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{\varepsilon_1}{2} + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\exp\left(-B_a\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right) - B_b\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right) - 2B_{ab}\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right)\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right)\right)$$

With:

$$\exp\left(-B_a\left(\tfrac{1}{16} + \alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right) - B_b\left(\tfrac{1}{16} + \alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right) - 2B_{ab}\left(\tfrac{1}{16} + \alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_1\right)\left(\tfrac{1}{16} + \alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_2\right)\right) \quad , \alpha = \left\{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}\right.$$

$$= \exp\left(-\tfrac{B_a}{16} - B_b/16 - 2B_{ab}/16^2\right)\cdot\left\{1 + \nabla_\varepsilon(\dots)\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{16}\left(B_a + B_b - \tfrac{2B_{ab}}{16}\right)\right)\cdot\left\{1 + \begin{pmatrix} -B_a\,\alpha/4 & -2B_{ab}\left(\tfrac{1}{16} + \cancel{\alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_2}\right)\cdot\tfrac{\alpha}{4} \\ -B_b\,\alpha/4 & -2B_{ab}\left(\tfrac{1}{16} + \cancel{\alpha\tfrac{1}{4}\varepsilon_1}\right)\cdot\tfrac{\alpha}{4}\end{pmatrix}\Bigg|_{\varepsilon=0}\cdot\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}\right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{16}(B_a + B_b - 2B_{ab}/16)\right)\cdot\left\{1 + \varepsilon_1\cdot(-B_a\cdot\alpha/4 - 2B_{ab}\cdot\alpha/4\cdot1/16) + \varepsilon_2\cdot(-B_b\cdot\alpha/4 - 2B_{ab}\cdot\alpha/4\cdot1/16)\right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \exp\left(-\tfrac{1}{16}(B_a + B_b - 2B_{ab}/16)\right)\cdot\left\{1 - \tfrac{\alpha}{4}\varepsilon_1(B_a + 2B_{ab}/16) - \tfrac{\alpha}{4}\varepsilon_2(B_b + 2B_{ab}/16)\right\} + O(\varepsilon^2)$$

$$\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{\varepsilon_1}{2} - \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\cdot\left(1 + \tfrac{\cancel{\alpha}\,1}{4}\varepsilon_1\left(B_a + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right) + \tfrac{\cancel{\alpha}\,1}{4}\varepsilon_2\left(B_b + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right)\right) = \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{\varepsilon_1}{2} + \tfrac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(1 - \tfrac{\cancel{\alpha}\,1}{4}\varepsilon_1\left(B_a + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right) - \tfrac{\cancel{\alpha}\,1}{4}\varepsilon_2\left(B_b + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right)\right)$$

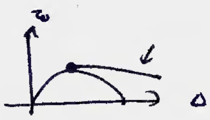
$$\Rightarrow \tfrac{1}{\cancel{2}}\left(\tfrac{1}{4}\varepsilon_1\left(B_a + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right) + \tfrac{1}{4}\varepsilon_2\left(B_b + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right)\right) - \tfrac{1}{\cancel{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tfrac{1}{8}\varepsilon_1\left(B_a + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right) - \tfrac{1}{8}\varepsilon_2\left(B_b + \tfrac{2B_{ab}}{16}\right) = 0}$$

If $B_a = B_b$, then we have the same particles, and $B = B_a = B_b = B_{ab}$, then:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \tfrac{1}{8}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(B + 2B/16) = 0 \Rightarrow 1 - \tfrac{1}{8}(B + B/8) = 0 \Rightarrow 8 = B + B/8 \Rightarrow B = 8\cdot\tfrac{8}{9} = \tfrac{64}{9} = 6$$

Work to do :

1) Find the critical line  ok ; not 100% accurate cos not the steady-state, but diff. equation.

2) Runge-Kutta : 3 urns : periodic solutions ?

3) Redo. everything with $T(n) = T_0 + \Theta \,|\, 1 - n_a - x\, n_b)$; $x=1$ for "a" particles ; $x<1$ for "b" particles same behavior as 1).

4) Van der Meer : $\boxed{F \sim n^2 e^{-Bn^2}} \to F \sim (n_a+n_b)^2\, e^{-B_a n_a^2 - B_b n_b^2 - B_{ab} n_a n_b . 2}$

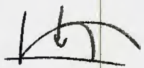
B_a, B_b : known
B_{ab} : unknown (two body)

$F(n2) = F(n_a, n_b)$

Redo everything
(if $a=b$, then $F \sim 4n^2 e^{-B(2n)^2}$: recover the article)

same probability for "a" and "b" particles
⇒ same equations for n_{a_1}, n_{b_1}
⇒ symetric solutions for n_{a_1}, n_{b_1} : $n_{a_1} = n_{b_1}\ \forall t$!
⤳ not so interesting.

 $\varepsilon_i = 0\ \forall i$ 

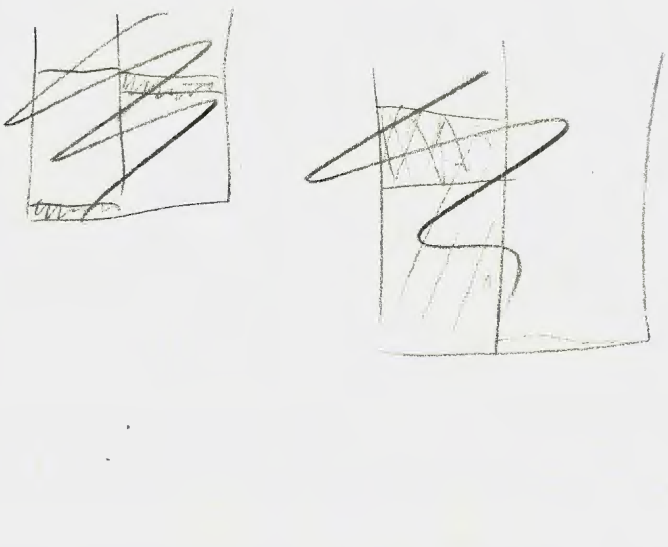
1) faire $\varepsilon_i(T_0)$ pour le premier modèle 

$\varepsilon_1 \sim n_{a_1} - n_{a_2}$
$\varepsilon_2 \sim n_{b_1} - n_{b_2}$
$\varepsilon_3 \sim n_{a_1} - n_{b_1}$
$\varepsilon_4 \sim \frac{N - 2(n_{a_1} + n_{b_1})}{2N}$

2) état de séparation ? près de $T_0 = T_0^{critique}$: $n_{a_1} - n_{b_1}$ cf. point 1.

3) Comment il a établi Eggers la formule B_a, B_b
⤳ voir si on peut améliorer la forme des flux.

4) étudier la diffusion ~~$T = (T_0 + \Theta(1-n)$~~ des espèces différentes (exposant critique)
⟶ discuter avec Adam
selon moi, diffusion normale toujours.



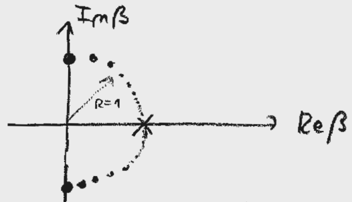
$\varepsilon_1 = \frac{n_{a_1} - n_{a_2}}{N} = n_{a_1} - (1 - n_{a_1}) = 2n_{a_1} - 1$

Urn Yang-Lee :

On sait : pour des systèmes à l'équilibre, il y a transition de phase lorsque l'énergie libre diverge : $F = -\frac{1}{\beta}\ln(Z)$. Par conséquent, il y a transition de phase pour les zéros réels de la fonction de partition :

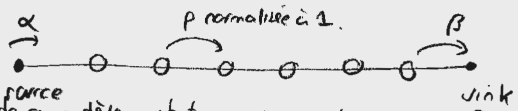
$$Z = \sum^{N} e^{-\beta H} \quad ; \quad P_E = \frac{e^{-\beta E}}{Z} \quad ; Z = \text{polynôme}$$

Si $N \to \infty$, alors dans le plan complexe des zéros de la fonction de partition, qui sont sur le cercle unité, ont un point d'accumulation sur l'axe réel :



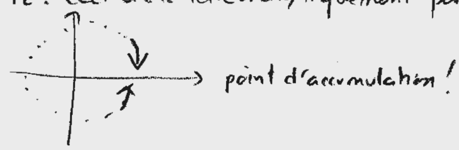
Ceci est la théorie de Yang-Lee, valable pour les systèmes à l'équilibre. Qu'en est-il des systèmes hors-équilibre ? On peut étendre ce résultat, sans qu'il y ait néanmoins de réelle compréhension théorique.

1) Modèle "ASEP" : 2 articles Derrida

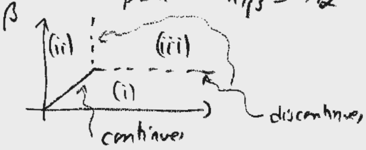


On peut calculer l'état d'équilibre de ce modèle, et trouver un analogue pour P_E. Ceci a été fait analytiquement par Derrida. On trouve :

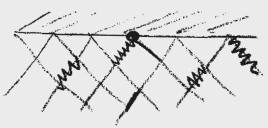
$$Z_N = \sum_{p=1}^{N} \frac{(1/\beta)^{p+1} - (1/\alpha)^{p+1}}{1/\beta - 1/\alpha} A(p) \quad ; \text{ zéros de } Z_N :$$

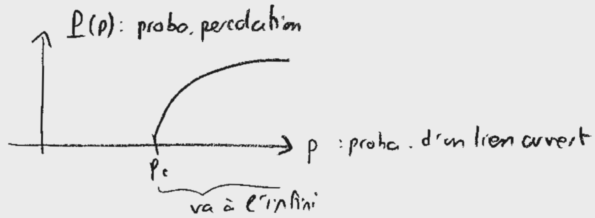


diag. phase :



2) Directed percolation :





On peut calculer : $P(t)$ et pas $P(\infty)$; $t < \infty$
$P(0) = 1$
$P(1) = 2p(1-p) + p^2$
$P(2) = \ldots$
$\vdots$
$P(15) = \ldots$

on calcule les zéros de cette distribution, $p \in \mathbb{C}$

Questions : 1) marche pour $P(t)$, alors qu'il s'agit d'un paramètre d'ordre et non de la fonction de partition.
2) point d'accumulation en $p = p_c$, et pas $p < p_c$. Pourquoi ?...

Notre idée : modèle d'urnes. Nous savons (cf. article Koréens) que pour un modèle donné à le flux (2 urnes) est proportionnel à n, que la fonction de partition s'écrit :

$$Z_N = 1 + \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{j} \frac{F\left(\frac{N-i+1}{N}\right)}{F(i/N)} \quad ; \quad \forall \text{ flux de la forme } F(n) = n e^{-\sum_{k\geq 1} n^k a_k}$$

Pour faire une analogie avec Yang-Lee, nous devons avoir Z_N sous la forme d'un polynôme. En fait, avec un tel flux, c'est bien le cas. L'idée est de commencer par le modèle simple $F(n) = n e^{-An}$ et de vérifier qu'il y a un point d'accumulation des zéros au point critique. Ensuite, on peut essayer le modèle plus compliqué $F(n) = n e^{-An - Bn^2}$ en espérant qu'il y ait un point tricritique, et étudier ce que donne la th. Yang-Lee (ou son analogue) appliquée à un tel point par un système hors-équilibre (ce qui n'a jamais été fait).

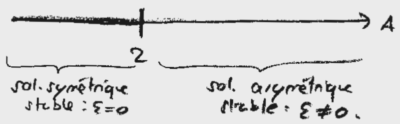
Système 1 : $F(n) = n e^{-An}$

Point critique : soit $\varepsilon = \frac{N_1 - N_2}{2N} = \frac{n_1 - n_2}{2}$, alors :

$$F(n_1) = F(n_2)$$

$$\Rightarrow (\varepsilon + 1/2)\, e^{-A(\varepsilon + 1/2)} - (1/2 - \varepsilon)\, e^{-A(1/2 - \varepsilon)} = 0$$

$$\xrightarrow[\text{calculs}]{\text{Taylor}} \boxed{A = 2}$$



Implémentation numérique : on peut reformuler la fonction de partition comme sur la feuille 2, pour avoir une somme

On peut faire quelques remarques sur cette nouvelle forme :

- un polynôme explicite est numériquement bien plus facile à traiter
- on peut voir (numériquement), que si : • N est pair, alors $z = -1$ est solution avec multiplicité $N/2$
  • N est impair, alors $z = -1$ n'est pas solution
- on peut réécrire la série sous la forme (pour les routines numériques préexistantes) :

$$Q = \sum_{i=0}^{(N/2-1)(N/2+1)} a_i z^i$$

$$a_i = \begin{cases} 2 C_j^N & \text{si } i = j(N-j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en effet :

$$Q = 2 + \sum_{k=1}^{N-1} C_k^N z^{k(N-k)}$$

$$= 2 + C_1^N z^{1(N-1)} + C_{N-1}^N z^{(N-1)(N-(N-1))}$$
$$+ C_2^N z^{2(N-2)} + C_{N-2}^N z^{(N-2)(N-(N-2))}$$
$$+ \cdots$$
$$+ C_{\frac{N}{2}-1}^N z^{(\frac{N}{2}-1)(N-(\frac{N}{2}-1))} + C_{N/2+1}^N z^{(\frac{N}{2}+1)(N-(N/2+1))} + C_{N/2}^N z^{\frac{N}{2}(N-N/2)}$$

$$= 2 + (C_1^N + C_{N-1}^N) z^{N-1} + (C_2^N + C_{N-2}^N) z^{2(N-2)} + \dots + (C_{\frac{N}{2}-1}^N + C_{\frac{N}{2}+1}^N) z^{(\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}+1)} + C_{N/2}^N z^{\frac{N}{2}(N-N/2)}$$

$$= 2 + 2 C_1^N z^{N-1} + 2 C_2^N z^{2(N-2)} + \dots + 2 C_{\frac{N}{2}-1}^N z^{(\frac{N}{2}-1)(\frac{N}{2}+1)} + 1 \cdot C_{N/2}^N z^{N^2/4}$$

On définit donc les coefficients a_i comme ci-dessus. On comprend déjà bien la difficulté numérique à trouver les zéros d'un polynôme d'ordre $\sim N^2/4 \dots, N \to \infty \dots$ Que donnent les zéros numériques ? On voit que dans le plan $\{z\} : \{\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\}$, les zéros tendent vers le cercle unité (Fig. 1). Ceci est le même résultat que Yang-Lee pour les systèmes à l'équilibre, et même si $\lim_{N\to\infty} |z| = \lim_{N\to\infty} e^{-|A|/N} = 1$ (a priori), ce n'est pas un résultat évident. En effet, tout ce qu'on sait c'est que si $N \to \infty$, alors $A \to 2$ au point critique, mais il n'est pas évident que les autres racines ne divergent pas plus vite que N. De plus, on constate que $\forall N$ les zéros sont à l'intérieur du cercle unité (Fig 1b), pas non plus évident. En résumé :

équilibre (Yang-Lee)	hors équilibre
$\lvert z\rvert = 1$	$\lvert z\rvert = 1$
$N < \infty$	$N \to \infty$

On retrouve les résultats de l'équilibre dans la limite thermodynamique uniquement. La preuve analytique du fait que les racines satisfont

$$|z| < 1 \quad \forall N$$
$$\lim_{N\to\infty} |z| = 1$$

n'est pas facile à faire (Stirling, etc.). Le point d'accumulation, pour faire l'analogie avec la théorie de Yang-Lee, se fait en $z = 1$. En effet, il s'agit de la valeur positive purement réelle, donc celle qui va correspondre au point critique $A = 2$.

Qu'en est-il du plan $\{\mathrm{Re}\,A, \mathrm{Im}\,A\}$? On a

$$A = -N \ln(z^*),$$

et les zéros sont représentés par $N = 40$ par la fig. 2 et $N = 150$ par la fig. 3. On voit qu'il y a une accumulation de points par $A = 2 + \varepsilon(N)$, où $\varepsilon(N)$ est une fonction décroissante de N : ⚠ plus subtil ! exposant de déclin

- accumulation de points : conforme aux prédictions de Yang-Lee par les systèmes à l'équilibre.
- si $N \uparrow$, alors $\varepsilon(N)$ diminue, mais très lentement. On suppose que $\varepsilon(N) \to 0$ par $N \to \infty$. Il s'agit d'une correction très fine : en effet, cela signifie de la relation $A = -N \ln(z^*(N))$ que les zéros z^* se comportent comme $z^* \simeq e^{-2/N}$ par $N \to \infty$, et par $N = 150$ on comprend bien à quel point il s'agit d'une correction fine et il est difficile de voir avec précision ce comportement.
- on voit de la Fig. 3 que la pente du point d'accumulation est différente de $\pi/2$, ce qui dans la théorie de Yang-Lee correspondrait à une transition de second ordre, soit continue. Il s'agit en effet bien de la transition que nous avons analytiquement, car il n'y a pas d'état métastable.

On peut étudier la vitesse d'approche des zéros vers le point critique. On fait un graphique, dans le plan $\{A\}$ (i.e. $\mathrm{Re}\,A, \mathrm{Im}\,A$) du module de la racine de valeur imaginaire la plus petite. On fait une interpolation en $\alpha / \log(|A|)$, c'est-à-dire dans le plan $|z|$ cela correspondrait à une loi de puissance d'exposant α. (Fig. 4). L'extrapolation de cette relation mène en un point critique en $A \simeq 1.5$, ce qui n'est pas correct. Néanmoins, N maximum n'est que 71 (polynôme d'ordre 1000), et il ne nous est pas possible à cause de limitations numériques d'aller plus loin. La pente doit changer, mais pour N grand, plus grand que nous ne pourrions le vérifier.

On peut désirer étudier un autre système plus complexe qui exhiberait un point tricritique, et voir ce que donne Yang-Lee en ce point ③

Système 2 : $F(n) = ne^{-An-Bn^2}$

La condition d'équilibre est

$$F(n_1) = F(n_2)$$

$$\Rightarrow n_1 e^{-An_1-Bn_1^2} - n_2 e^{-An_2-Bn_2^2} = 0$$

Introduisons les nouvelles variables donnant la fraction occupée d'une urne :

$$n_1 := \frac{n}{N} \longrightarrow n$$

$$n_2 = N - n_1 \longrightarrow 1-n$$

alors :

$$f(n) = ne^{-An-Bn^2} - (1-n)e^{-A(1-n)-B(1-n)^2} = 0$$

Introduisons le paramètre d'ordre :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{n_1-n_2}{2N} \\ n_1+n_2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{variables } n} \begin{cases} n_1 = 1/2+\varepsilon \\ n_2 = 1/2-\varepsilon \end{cases}$$

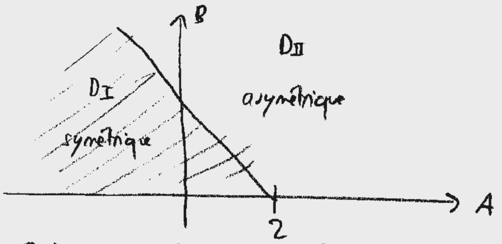
Les conditions d'équilibre deviennent alors :

$$f(\varepsilon) = \left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right)e^{-A(1/2+\varepsilon)-B(1/2+\varepsilon)^2} - \left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon\right)e^{-A(1/2-\varepsilon)-B(1/2-\varepsilon)^2} = 0 \qquad ⊛$$

Cette condition donne donc $B = B(A)$ qui définit la courbe de transition entre la phase symétrique et la phase asymétrique. On résoud en développant au premier ordre en $\varepsilon = 0$: le calcul donne

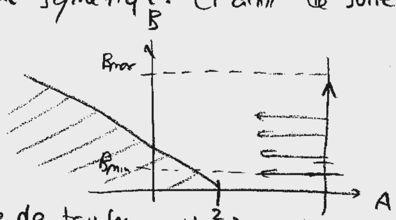
$$\boxed{B = 2 - A} \quad , \quad B > 0$$

Si $B=0$, on trouve le point critique $A=2$ comme avant, ce qui est OK. Il faut de plus que $B \geq 0$, ce qui impose $A \leq 2$.



Existe-t-il des états métastables et un point tricritique ?

On peut trouver les états métastables numériquement comme suit. On part d'un état initial asymétrique dans D_{II} pour B_{min}. On résoud l'équation d'équilibre ⊛ et si la solution est toujours asymétrique, diminue A d'une certaine valeur jusqu'à ce que la solution soit symétrique. Et ainsi de suite de B_{min} à B_{max}

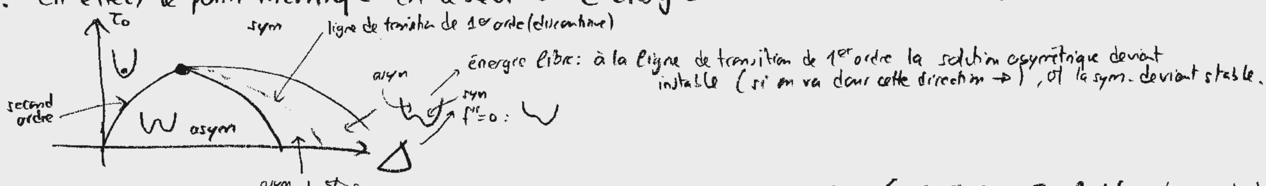


Si la courbe formée de tous les points où on trouve par la première fois un état symétrique est différente de la courbe $B=2-A$, alors $\exists$ des états métastables. Comme le montre la Fig. 4, il n'existe pas de telle courbe car la perte de l'asymétrie se fait sur la courbe de transition de deuxième ordre.

Existe-t-il un point tricritique ? On répond à cette question en calculant

$$\left.\begin{aligned} f'(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} &= 0 \\ f'''(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

ce qui donne A et B. En effet, le point tricritique est le seul où l'énergie libre montre une telle propriété en $\varepsilon = 0$.



On ne s'attend pas à l'existence d'un point tricritique vu le résultat numérique selon lequel $\nexists$ d'état métastable. Le calcul analytique de (**) montre effectivement qu'il n'existe pas A et B satisfaisant à (**).

Par conséquent, malheureusement ce modèle n'a pas la richesse désirée pour étudier la relation avec Yang-Lee au p.t. tricritique. Un terme supplémentaire, soit $F(n) = ne^{-An-Bn^2-Cn^3}$ ne donne non plus rien d'intéressant car nous aurions alors 3 paramètres A, B, et C

Fig.4

$F(n) = n^2 e^{-An-Bn^2}$

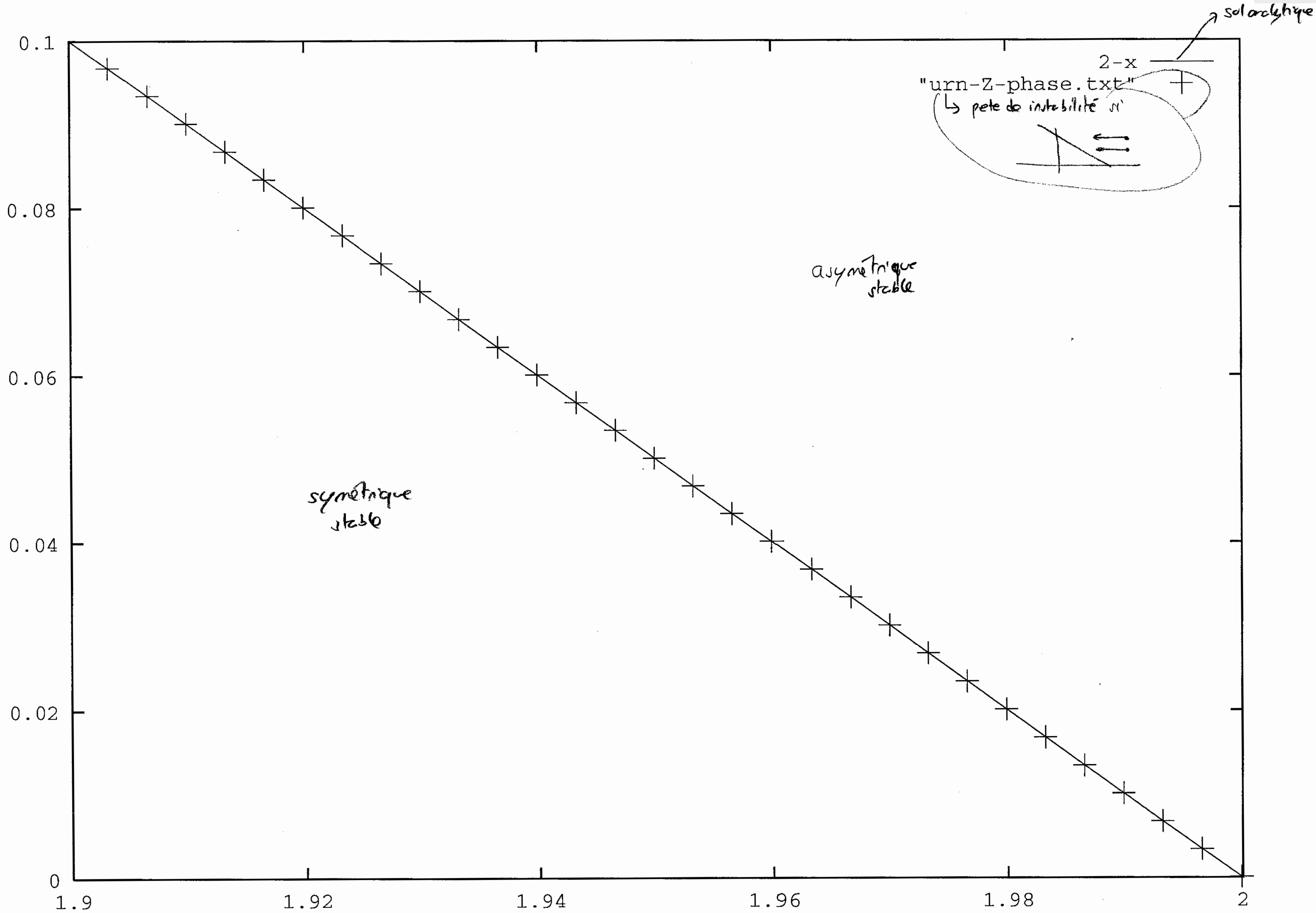
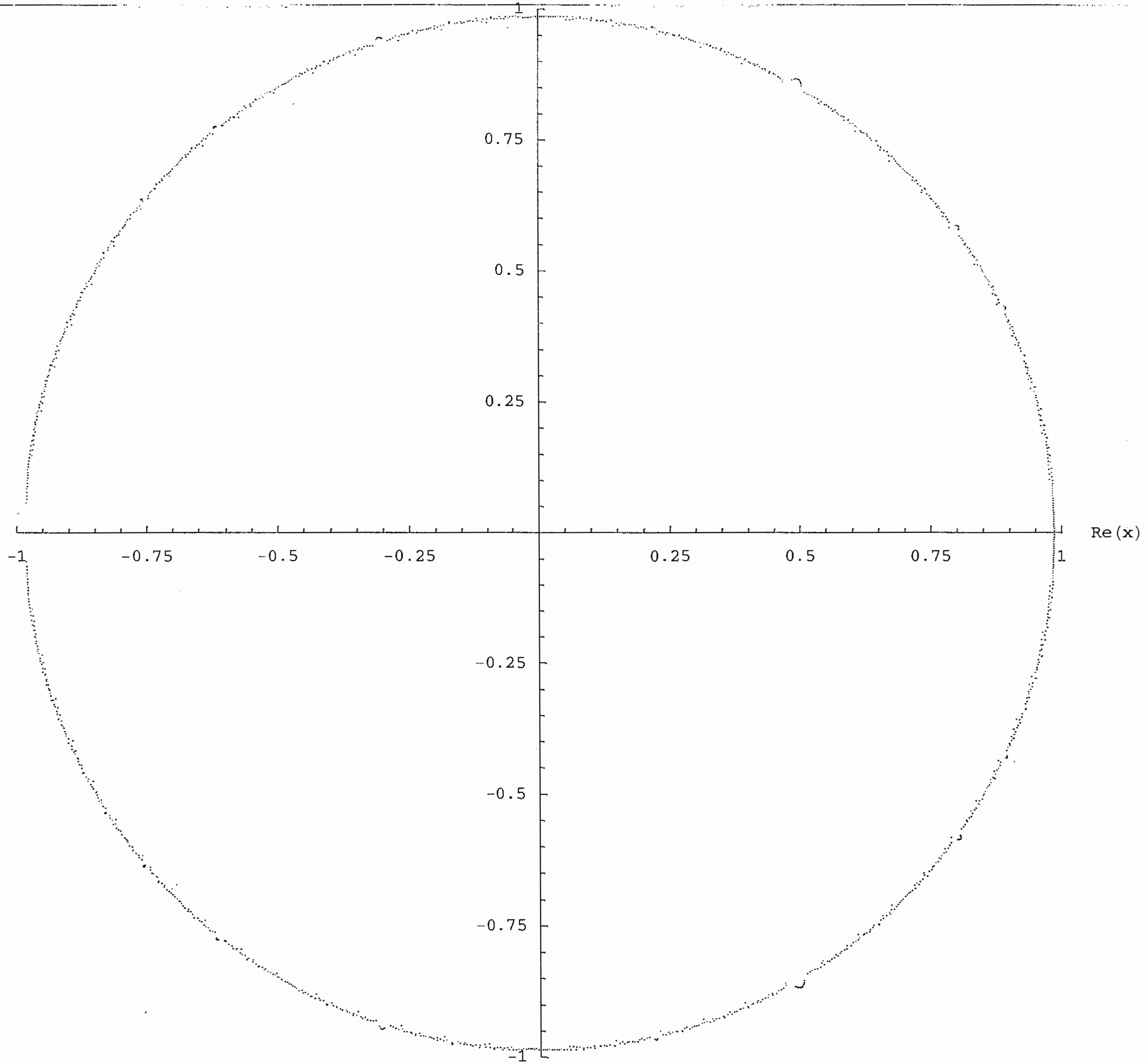
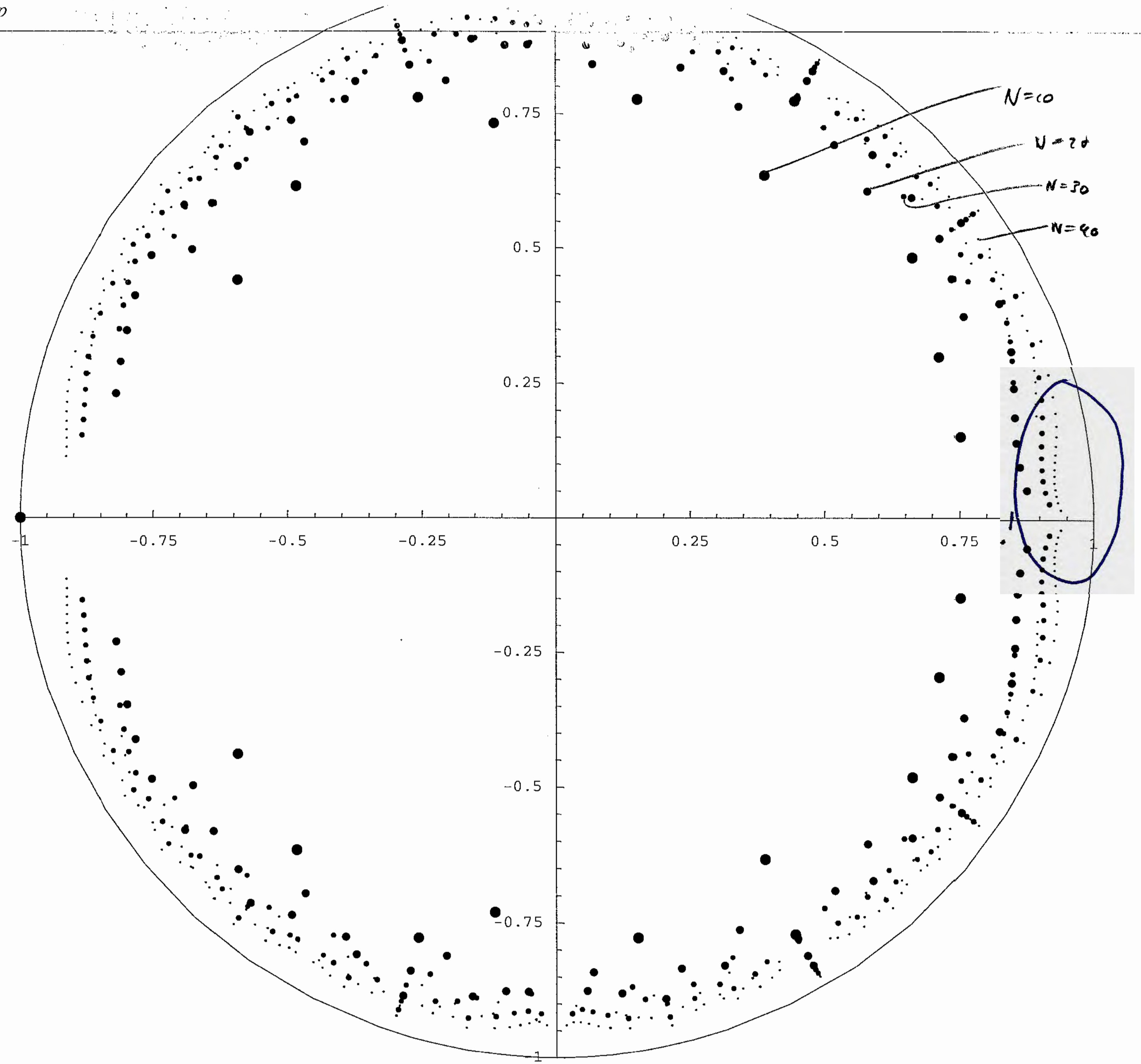


Fig.1



N = 150

Fig. 16.



$F(n) = n e^{-An}$

Plan $z = e^{-A/N}$

Ĺ.no

Fig.2

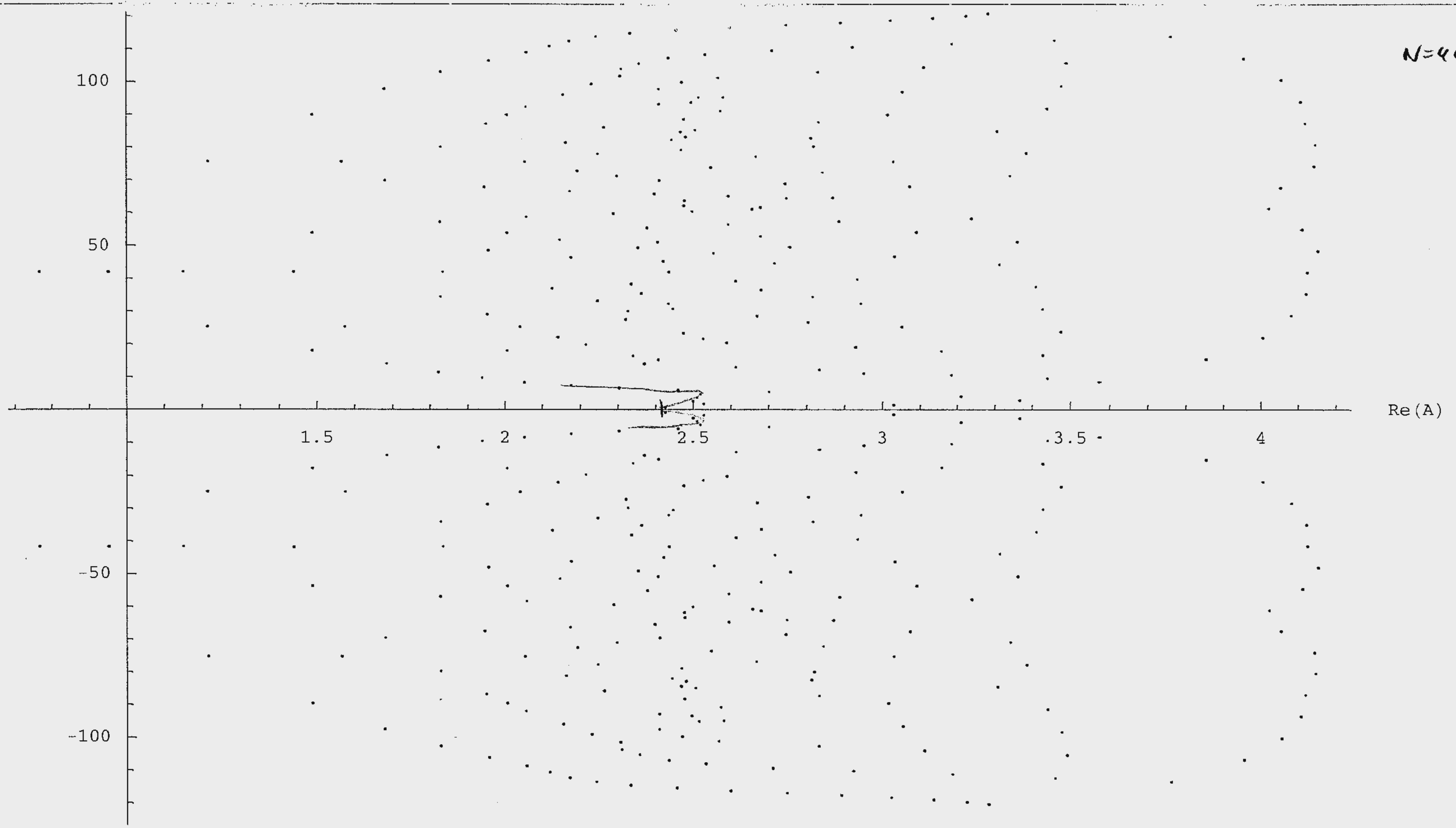
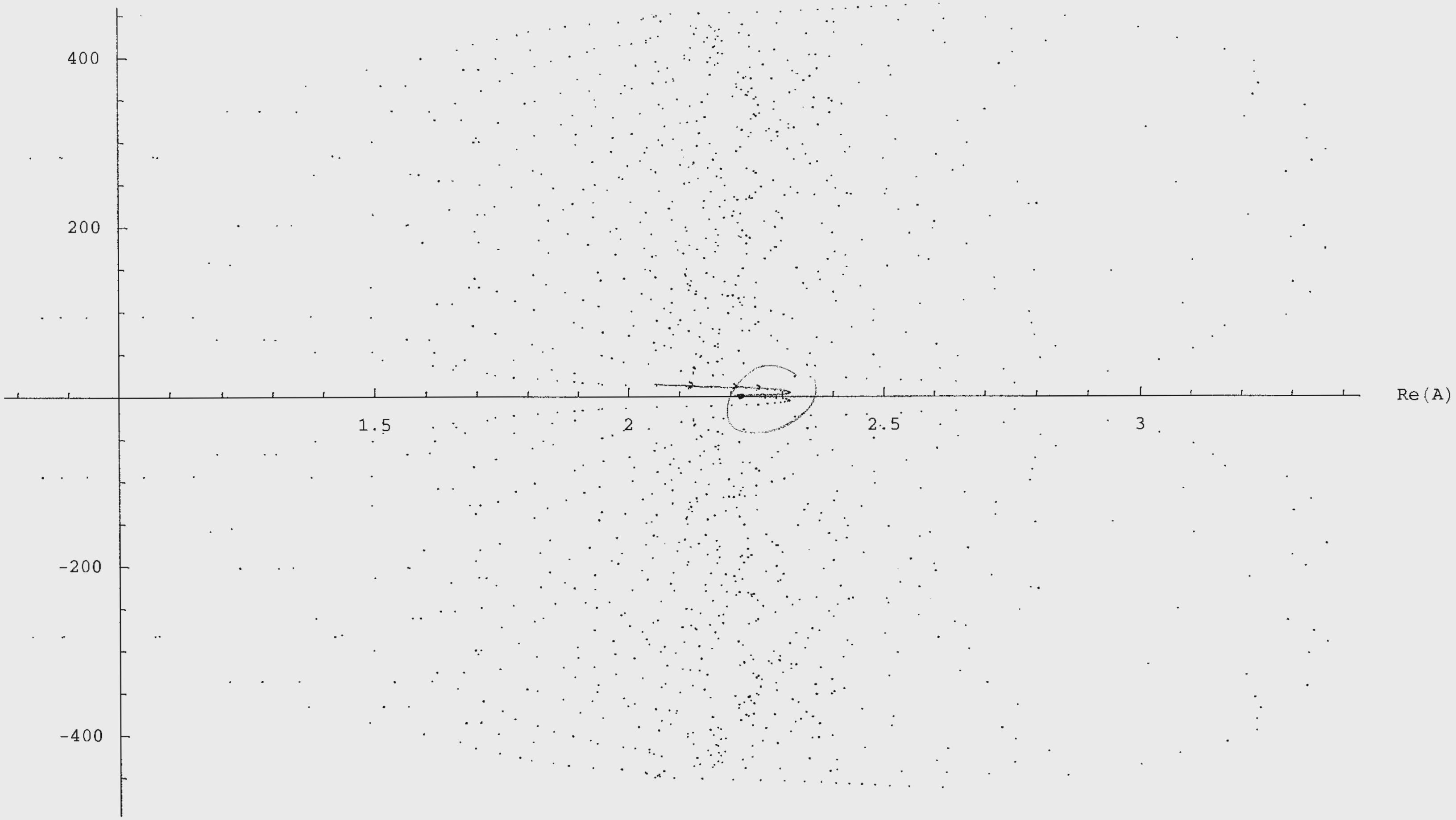


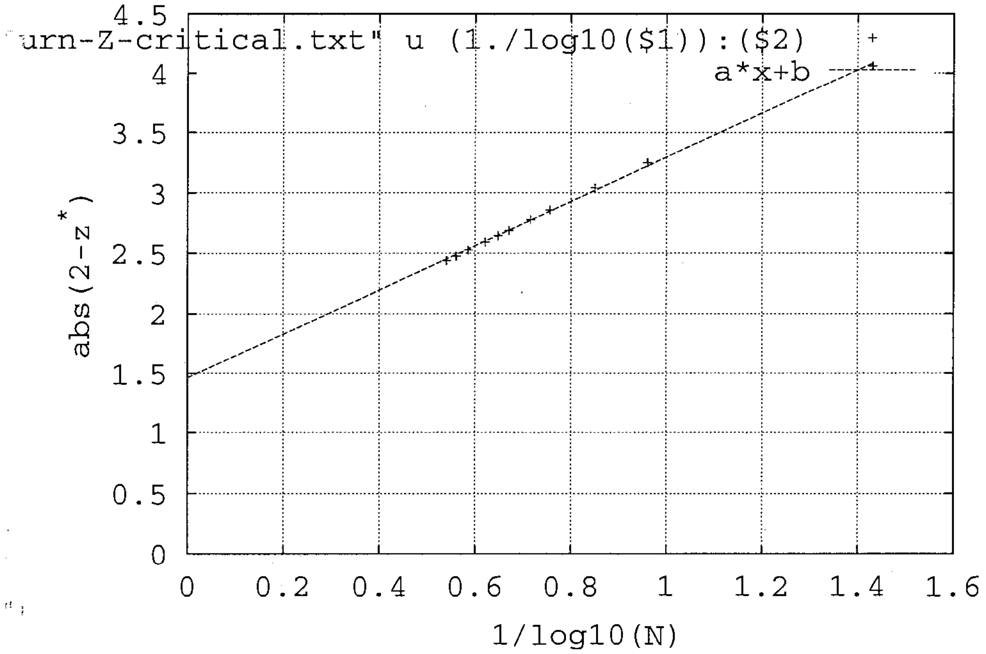
Fig. 3



N=150

pente non nulle ⇒
transition continue : oui!
(2e ordre)

Fig. 4



"urn-Z-critical.txt" u (1./log10($1)):($2)
a*x+b
abs(2-z*)
1/log10(N)
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Equations à résoudre :

NEW: nouvelle méthode. Cf. Ioana !

$$\left(\tfrac12-\varepsilon\right)e^{-A(1/2-\varepsilon)} = \left(\tfrac12+\varepsilon\right)e^{-A(1/2+\varepsilon)} \qquad \text{(Flux)} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Re}\left[-\tfrac{A}{4}+\ln 2\right] = \mathrm{Re}\left[-A\left(\tfrac14-\varepsilon^2\right)-\left(\tfrac12-\varepsilon\right)\ln\left(1/2-\varepsilon\right)-\left(1/2+\varepsilon\right)\ln\left(1/2+\varepsilon\right)\right] \qquad (2)$$

($\mathrm{Reg}_1=\mathrm{Reg}_2$ limite thermo. terme dominant Z_N)

Soit:

$$\varepsilon = x_1+ix_2 \qquad (3)$$
$$A = a_1+ia_2 \qquad (4)$$
$$\tfrac12-\varepsilon = \tfrac12-x_1-ix_2 = r_1e^{+i\varphi_1} \; ; \; r_1=\sqrt{\left(\tfrac12-x_1\right)^2+x_2^2} \; ; \; \varphi_1 = \mathrm{atg}\left(\frac{x_2}{1/2-x_1}\right) \qquad (5)$$
$$\tfrac12+\varepsilon = \tfrac12+x_1+ix_2 = r_2e^{+i\varphi_2} \; ; \; r_2=\sqrt{\left(\tfrac12+x_1\right)^2+x_2^2} \; ; \; \varphi_2 = \mathrm{atg}\left(\frac{x_2}{1/2+x_1}\right) \qquad (6)$$

Pour éviter les divergences, on peut définir $\varphi = \mathrm{atg}(Y/x)$ avec $\mathrm{atg}(Y/0) = \begin{cases}\pi/2 & \text{si } Y>0\\ -\pi/2 & \text{si } Y<0\end{cases}$. Reformulons l'Eq.(1). En prenant le ln on a :

$$\ln\left(\tfrac12-\varepsilon\right)-A\left(\tfrac12-\varepsilon\right) = \ln\left(\tfrac12+\varepsilon\right)-A\left(\tfrac12+\varepsilon\right)$$
$$\Longrightarrow \ln r_1+i\varphi_1-A\left(\tfrac12-\varepsilon\right) = \ln r_2+i\varphi_2-A\left(\tfrac12+\varepsilon\right)$$
$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - \underbrace{(a_1+ia_2)\left(\tfrac12-x_1-ix_2\right)} = i(\varphi_2-\varphi_1) - \underbrace{(a_1+ia_2)\left(\tfrac12+x_1+ix_2\right)}$$
$$(a_1+ia_2)\left(\tfrac12-x_1-ix_2\right) = a_1\left(\tfrac12-x_1\right)-ia_1x_2+ia_2\left(\tfrac12-x_1\right)-i^2a_2x_2 = a_1\left(\tfrac12-x_1\right)+a_2x_2-ia_1x_2+ia_2\left(\tfrac12-x_1\right)$$
$$(a_1+ia_2)\left(\tfrac12+x_1+ix_2\right) = a_1\left(\tfrac12+x_1\right)+ia_1x_2+ia_2\left(\tfrac12+x_1\right)+i^2a_2x_2 = a_1\left(\tfrac12+x_1\right)-a_2x_2+ia_1x_2+ia_2\left(\tfrac12+x_1\right)$$
$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-a_1\left(\cancel{1/2}-x_1\right)-a_2x_2+a_1\left(\cancel{1/2}+x_1\right)-a_2x_2 = i(\varphi_2-\varphi_1)-ia_1x_2+ia_2\left(\cancel{1/2}-x_1\right)-ia_1x_2-ia_2\left(\cancel{1/2}+x_1\right)$$
$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-2a_2x_2+2a_1x_1 = i\left[\varphi_2-\varphi_1-2a_1x_2-2a_2x_1\right] \quad ✓$$

Ceci donne 2 Eqs., pour les parties réelles et imaginaires:

$$\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+2a_1x_1-2a_2x_2 = 0 \quad ✓ \qquad (7)$$
$$\varphi_1-\varphi_2+2a_1x_2+2a_2x_1 = 0 \quad ✓ \qquad (8)$$

De même, on peut développer la relation (2):

$$-\frac{a_1}{4}+\ln 2 = \mathrm{Re}\left[-(a_1+ia_2)\Big(\tfrac14-\underbrace{(x_1+ix_2)^2}_{=x_1^2-x_2^2+2ix_1x_2}\Big)-\left(\tfrac12-x_1-ix_2\right)\underbrace{\ln\left(r_1e^{i\varphi_1}\right)}_{=\ln r_1+i\varphi_1}-\left(\tfrac12+x_1+ix_2\right)\underbrace{\ln\left(r_2e^{i\varphi_2}\right)}_{=\ln r_2+i\varphi_2}\right]$$
$$= \mathrm{Re}\left[-a_1\left(\tfrac14-x_1^2+x_2^2\right)-ia_2(-2ix_1x_2) - \left(\tfrac12-x_1\right)\ln r_1-(-i)x_2i\varphi_1-\left(\tfrac12+x_1\right)\ln r_2-ix_2i\varphi_2+O(i)\right]$$
$$= -a_1\left(\tfrac14-x_1^2+x_2^2\right)-2a_2x_1x_2-\left(\tfrac12-x_1\right)\ln r_1-\left(\tfrac12+x_1\right)\ln r_2-x_2\varphi_1+x_2\varphi_2$$
$$\Longrightarrow -\cancel{\frac{a_1}{4}}+a_1\left(\cancel{\tfrac14}-x_1^2+x_2^2\right) = -\ln 2-2a_2x_1x_2-\tfrac12\ln(r_1\cdot r_2)+x_1\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+x_2(\varphi_2-\varphi_1)$$
$$\Longrightarrow a_2 = \frac{1}{2x_1x_2}\left[a_1(x_1^2-x_2^2)-\ln 2-\tfrac12\ln(r_1r_2)+x_1\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+x_2(\varphi_2-\varphi_1)\right] \qquad (9)$$

Comme on sait que $a_2\sim 0 \Longleftrightarrow$ on est près du point critique, alors il est utile d'éliminer la variable a_1 des Eqns. et se ramener à un système à 2 Eqs. pour les 2 inconnues x_1, x_2, on imposera ensuite la valeur petite de a_2 pour être certain d'être près de la transition. De l'Eq. (7):

$$a_1 = \frac{1}{2x_1}\left[2a_2x_2-\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right], \qquad (10)$$

que l'on insère dans (9):

$$a_2 = \underbrace{\frac{1}{2x_1x_2}\,\frac{1}{2x_1}\left[2a_2x_2-\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right](x_1^2-x_2^2)}_{=\frac{x_1^2-x_2^2}{4x_1^2\cancel{x_2}}2a_2\cancel{x_2}-\frac{x_1^2-x_2^2}{4x_1^2x_2}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} + \frac{1}{2x_1x_2}\left[-\ln 2-\tfrac12\ln(r_1r_2)+x_1\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+x_2(\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

$$\Longrightarrow a_2\underbrace{\left[1-\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1^2}\right]} = \frac{1}{2x_1x_2}\left[\underbrace{-\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+x_1\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}-\ln 2-\tfrac12\ln(r_1r_2)+x_2(\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

$$1-\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1^2} = \frac{2x_1^2-x_1^2+x_2^2}{2x_1^2} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1^2}$$

$$-\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)+x_1\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\left[\frac{2x_1^2}{2x_1}-\frac{x_1^2-x_2^2}{2x_1}\right] = \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{2x_1^2-x_1^2+x_2^2}{2x_1} = \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1}$$

$$\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{\cancel{2x_1}}{x_1^2+x_2^2}\,\frac{1}{\cancel{2x_1}x_2}\left[\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln(r_1r_2) + x_2(\varphi_2-\varphi_1)\right]$$

$$= \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\,\frac{x_1}{x_2}\left[-\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(r_1r_2) - x_2(\varphi_1-\varphi_2)\right] + \frac{1}{2x_2}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2x_2}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left[\frac{\ln 2}{x_2} + \frac{1}{2x_2}\ln(r_1r_2) + \varphi_1-\varphi_2\right] \qquad (11)$$

(10) dans (8) donne :

$$\varphi_1-\varphi_2 + \underbrace{\cancel{2}x_2\,\frac{1}{\cancel{2}x_1}\left[2a_2x_2 - \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right]}_{=\,2a_2\frac{x_2^2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} + 2a_2x_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi_1-\varphi_2 + 2a_2\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1} - \frac{x_2}{x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 0 \qquad (12)$$

On a donc le système de 2 Eqs :

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2x_2}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) - \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\left[\frac{\ln 2}{x_2} + \frac{1}{2x_2}\ln(r_1r_2) + \varphi_1-\varphi_2\right] && (13)\\ \varphi_1-\varphi_2 &+ 2\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1}a_2 - \frac{x_2}{x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 0 && (14)\end{aligned}}$$

<u>Résolution</u> : on choisit une faible valeur de a_2 pour être proche de la transition. On a alors un système de 2 Eqs. à 2 inconnues x_1 et x_2. Une fois x_1 et x_2 trouvés, on les remplace dans l'Eq. (10)

$$\boxed{a_1 = \frac{x_2}{x_1}a_2 - \frac{1}{2x_1}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}, \qquad (15)$$

ce qui donne a_1. On a :

$$r_1 = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}-x_1\right)^2+x_2^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+x_1\right)^2+x_2^2} \qquad (16)$$

$$\varphi_1 = \operatorname{atg}\left(\frac{x_2}{1/2-x_1}\right) \quad ; \quad \varphi_2 = \operatorname{atg}\left(\frac{x_2}{1/2+x_1}\right) \qquad (17)$$

<u>Mais</u> : on désire la ligne près du point critique, i.e. ε petit, a_2 petit. Ainsi $x_1^k \sim 0$ et $x_2^k \sim 0$ $\forall k > 1$, et on peut développer le système d'équations :

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \operatorname{atg}\left(2\frac{x_2}{1-2x_1}\right) \simeq \operatorname{atg}\left(2x_2[1+2x_1]\right) = \operatorname{atg}(2x_2 + O(x^2))\\ \varphi_2 &= \operatorname{atg}\left(2\frac{x_2}{1+2x_1}\right) \simeq \operatorname{atg}\left(2x_2[1-2x_1]\right) = \operatorname{atg}(2x_2+O(x^2))\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \varphi_1-\varphi_2 = O(x^2) = 0 \qquad (18)$$

$$r_1\cdot r_2 = \ldots = \frac{1}{4} + O(x^2) \qquad \Longrightarrow \ln(r_1r_2) \simeq -\ln 4 \qquad (19)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \ldots = 1 - 4x_1 + O(x^2) \qquad \Longrightarrow \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \simeq \ln(1-4x_1) \simeq -4x_1 \qquad (20)$$

Les Eqs. (13) et (14) deviennent ainsi (avec $\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln(2)$) :

$$\boxed{\begin{aligned} a_2 &= -2\frac{x_1}{x_2} && (21)\\ 2\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1}a_2 &+ 4x_2 = 0, && (22)\end{aligned}}$$

avec :

$$\boxed{a_1 = \frac{x_2}{x_1}a_2 + 2} \qquad (23)$$

Non, cette démarche n'est pas la bonne. Cf. Ioana.

(24)

(25)

$$F(x) = x\, e^{-\frac{1}{\tau_0 + \Delta(1-x)}}$$

$$z = 1 + \sum_{i=1}^{Nb} \prod_{j=1}^{i} \frac{F\left(1 + \frac{1-j}{Nb}\right)}{F(j/Nb)}$$

- Solution analytique pour $Nb = 2$:

$$z = 1 + \sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{i} \frac{F\left(1+\frac{1-j}{2}\right)}{F(j/2)} = 1 + \frac{F\left(1+\underbrace{\tfrac{1-1}{2}}_{=0}\right)}{F(1/2)} + \frac{F\left(1+\underbrace{\tfrac{1-1}{2}}_{=0}\right)}{F(1/2)} \cdot \frac{F\left(1+\underbrace{\tfrac{1-2}{2}}_{=-1/2}\right)}{F(2/2)}$$

$$= 1 + F(1)/F(1/2) + \underbrace{F(1)/F(1/2) \cdot F(1/2)/F(1)}_{=1}$$

$$= 2 + \frac{F(1)}{F(1/2)}$$

$$F(1) = e^{-\frac{1}{\tau_0 + \Delta(1-1)}} = e^{-1/\tau_0}$$

$$F(1/2) = 1/2\; e^{-1/(\tau_0 + \Delta(1-1/2))} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{\tau_0 + \Delta/2}}$$

$$\Rightarrow z = 2 + e^{-1/\tau_0}\, 2\, e^{\frac{1}{\tau_0 + \Delta/2}} = 0$$

$$\Rightarrow e^{1/(\tau_0 + \Delta/2)} = -e^{1/\tau_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_0 + \Delta/2} = \ln\left(-e^{1/\tau_0}\right) = \ln(-1) + \ln\left(e^{1/\tau_0}\right) = i\pi + \frac{1}{\tau_0}$$

$$\Rightarrow \tau_0 + \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} + i\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta}{2} = \tau_0 \frac{1}{1 + i\pi\tau_0} - \tau_0$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{2\tau_0}{1 + i\pi\tau_0} - 2\tau_0 = 2\tau_0\left[\underbrace{\frac{1}{1 + i\pi\tau_0}} - 1\right]$$

$$= \frac{1 - i\pi\tau_0}{(1 + i\pi\tau_0)(1 - i\pi\tau_0)} = \frac{1 - i\pi\tau_0}{1 + \pi^2\tau_0^2}$$

$$= 2\tau_0\left[\underbrace{\frac{1}{1 + \pi^2\tau_0^2} - 1}_{= \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \pi^2\tau_0^2}{1 + \pi^2\tau_0^2}} - i\pi \frac{\tau_0}{1 + \pi^2\tau_0^2}\right]$$

$$= -\frac{2\pi^2\tau_0^3}{1 + \pi^2\tau_0^2} - i\,\frac{2\pi\tau_0^2}{1 + \pi^2\tau_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = -\frac{2\pi\tau_0^2}{1 + \pi^2\tau_0^2}\left[\pi\tau_0 + i\right]}$$

- Vérifications : $\tau_0 = 1$: OK ; $\tau_0 = 2$: OK.
(Mathematica)